



Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales

Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales

PROYECTO

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia

PROYECTO

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia

ANA CELIA CASTIBLANCO PAIBA

Coordinadora General del Proyecto
Ministerio de Educación Nacional

LUIS MORENO ARMELLA

Asesor Internacional
CINVESTAV – IPN, México

EDITOR

Ministerio de Educación Nacional
Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

Elaborado por:

ANA CELIA CASTIBLANCO PAIBA.

Ministerio de Educación Nacional.

HENRY URQUINA LLANOS.

Ministerio de Educación Nacional.

LEONOR CAMARGO URIBE.

Profesora Universidad Pedagógica Nacional.

MARTIN E. ACOSTA GEMPELER.

Universidad Joseph Fourier. Grenoble. Francia.

Con la colaboración de:

FABIOLA RODRÍGUEZ GARCÍA.

Instituto Pedagógico Nacional.

Diseño, Diagramación, Prerensa digital, Impresión y terminados:
ENLACE EDITORES LTDA.

Primera edición: 1.500 ejemplares

ISBN: 958 - 97413 - 4 - 7

Prohibida su reproducción total o parcial sin autorización escrita del
Ministerio de Educación Nacional - MEN
Derechos reservados

DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA SU VENTA

Impreso en Colombia

Bogotá, D.C., Colombia
Abril 2004

INSTITUCIONES PARTICIPANTES

La implementación nacional del proyecto *“Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia”*, y la construcción del presente documento ha sido posible gracias a la participación de las siguientes instituciones educativas y docentes que hacen parte integral de la red consolidada en este proceso.

UNIVERSIDADES

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación.

Gilberto Obando Zapata. Coordinador Departamento de Antioquia.

Universidad del Norte

Departamento de Matemáticas.

Margarita Viñas de La Hoz. Coordinadora Departamento del Atlántico.

Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”

Facultad de Ciencias y Educación.

Martha Bonilla Estévez. Coordinadora Departamento de Cundinamarca y Bogotá D.C.

Jaime Romero Cruz. Coordinador Departamento de Cundinamarca y Bogotá D.C.

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas.

Leonor Camargo Uribe. Coordinadora Bogotá D.C.

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias.

José Manuel Holguín. Coordinador Departamento de Boyacá.

Universidad de la Amazonía

Facultad de Ciencias de la Educación. Programa Lic. Matemáticas y Física.

Javier Martínez Plazas. Coordinador Departamento del Caquetá.

Universidad Popular del Cesar

Facultad de Educación. Departamento de Matemáticas.

Álvaro de Jesús Solano, Coordinador Departamento del Cesar.

Universidad de Caldas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Carlos Barco Gómez. Coordinador Departamento de Caldas.

Universidad del Cauca

Facultad de Educación. Departamento de Matemáticas.
Yenny Rosero Rosero. Coordinadora Departamento del Cauca.
Alba Lorena Silva Silva. Coordinadora Departamento del Cauca.

Universidad de la Guajira

Facultad de Ciencias Básicas.
Ramón Bertel Palencia. Coordinador Departamento de la Guajira.

Universidad de los Llanos

Facultad de Educación.
Ivonne Amparo Londoño Agudelo. Coordinadora Departamento del Meta.

Universidad del Magdalena

Departamento de Matemáticas.
Pablo Gonzáles. Coordinador Departamento del Magdalena.
Jesús Tinoco. Coordinador Departamento del Magdalena.

Universidad de Nariño

Facultad de Educación. Departamento de Matemáticas.
Oscar Fernando Soto. Coordinador Departamento de Nariño.
Oscar Alberto Narváez Guerrero. Coordinador Departamento de Nariño.

Universidad “Francisco de Paula Santander”

Facultad de Ciencias Básicas.
Paulina Gómez Agudelo. Coordinadora Departamento Norte de Santander.
Carlos Díaz. Coordinador Departamento Norte de Santander.

Universidad del Quindío

Departamento de Matemáticas.
Julián Marín Gonzáles. Coordinador Departamento del Quindío.
Efraín Alberto Hoyos. Coordinador Departamento del Quindío.

Universidad Tecnológica de Pereira

Departamento de Matemáticas.
Carlos Arturo Mora. Coordinador Departamento de Risaralda.

Universidad de Sucre

Facultad de Educación.
Félix Rozzo. Coordinador Departamento de Sucre.
Jesús Cepeda. Coordinador Departamento del Cesar.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Educación & Escuela de Matemáticas.
Jorge Enrique Fiallo Leal. Coordinador Departamento de Santander.

Universidad Surcolombiana.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Gustavo Londoño Betancourt. Coordinador Departamento del Huila.

Jaime Polanía Perdomo. Coordinador Departamento del Huila.

Universidad del Tolima

Facultad de Educación.

Rubén Darío Guevara. Coordinador Departamento del Tolima.

Ivonne López. Coordinadora Departamento del Tolima.

Universidad del Valle

Instituto De Educación y Pedagogía.

Diego Garzón. Coordinador Departamento del Valle.

Octavio Augusto Pabón. Coordinador Departamento del Valle.

Universidad Nacional de Colombia.

Departamento de Matemáticas y Estadística.

Miryam Acevedo de Manrique. Coordinadora Departamento del Amazonas.

Universidad de Córdoba

Facultad de Educación.

Jhon Jairo Puerta. Coordinador Departamento de Córdoba.

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Dirección de Ciencias Básicas.

Ernesto Acosta Gempeler

SECRETARÍAS DE EDUCACIÓN

Secretaría de Educación Departamento del Atlántico

Yolima Fernández Felizzola. Coordinadora Departamento del Atlántico.

Secretaría de Educación Departamento del Putumayo

Edgar Gilberto Palacios. Coordinador Departamento del Putumayo.

Secretaría de Educación Departamento del Huila

Rafael Blanco Fernández. Coordinador Departamento del Huila.

INSTITUCIONES EDUCATIVAS DE BÁSICA Y MEDIA

Departamento de Antioquia

Colegio Santa Teresa. Medellín.

Normal Superior. Envigado.

Liceo Comercial Pedro Luis Álvarez. Caldas.

Normal Superior María Auxiliadora. Copacabana.

Normal Superior Pedro Berrío. Santa Rosas de Osos.
Instituto Técnico Industrial Simona Duque. Marinilla.
Liceo Fé y Alegría la Cima. Medellín.
Instituto Técnico Industrial Jorge Eliécer Gaitán. Carmen de Viboral.

Departamento del Atlántico

Escuela Normal Superior Nuestra Señora de Fátima. Sabanagrande.
Instituto Pestalozzi. Barranquilla.
Normal Superior Santa Ana. Baranoa.
Normal Superior la Hacienda. Barranquilla.
Escuela normal Superior de Manatí. Manatí.
Colegio de Bachillerato Técnico. Santo Tomás.
Colegio de Bachillerato Masculino. Sabanalarga.

Departamento de Amazonas

Internado Indígena Femenino María Auxiliadora. Nazareth. Corregimiento de Leticia.
INEM “José Eustasio Rivera”. Leticia.

Bogotá D.C

Centro Educativo Distrital Rodrigo Lara Bonilla. (J.T).
Colegio Distrital Heladia Mejía.
Instituto Pedagógico Nacional.
Colegio Distrital de Educación Básica y Media General Santander.
Unidad Básica Rafael Uribe Uribe (J.M).
Colegio Distrital Benjamín Herrera (J.M).
Colegio República de Costa Rica.

Departamento de Boyacá

Instituto Técnico Rafael Reyes. Duitama.
Instituto Integrado Nalzado Silvino Rodríguez. Tunja.
Colegio Nacional Sugamuxi. Sogamoso.
Normal Superior Santiago de Tunja. Tunja.
Normal Superior Sor. Josefa del Castillo y Guevara. Chiquinquirá.
Colegio Julius Sierber. Tunja.

Departamento de Caldas

Normal Superior de Caldas. Manizales.
Colegio la Asunción. Manizales.
Normal Superior María Escolástica. Salamina.
Instituto Nacional Los Fundadores. Riosucio.

Departamento del Cesar

Normal Superior María Inmaculada. Manaure.
Colegio Manuel Germán Cuello. Anexo a la Universidad Popular del Cesar. Valledupar.
Colegio Nacional Loperena. Valledupar.
Instituto Técnico Industrial Pedro Castro Monsalve. Valledupar
Instituto Técnico Industrial La Esperanza. Valledupar.

Departamento del Caquetá

Colegio Juan Bautista la Salle. Florencia.
Colegio Nacional La Salle. Florencia.
Escuela Normal Superior. Florencia.
Colegio Cervantes. Morelia.

Departamento del Cauca

Liceo Nacional Alejandro Humboldt. Popayán.
Instituto Técnico Industrial. Popayán.
INEM Francisco José de Caldas. Popayán.
Instituto Nacional Mixto. Piendamó.

Departamento de Córdoba

Normal Superior. Montería.
Normal Superior Lácidez A. Iriarte. Sahagún.
Colegio Marceliano Polo. Cereté.

Departamento de Cundinamarca

Instituto Técnico Industrial. Tocancipá.
Instituto Técnico Industrial Capellanía. Fúquene.
Instituto Técnico Industrial. Zipaquirá.
Colegio Departamental San Juan de Rioseco.
Normal Superior Nuestra Señora de la Encarnación. Pasca.

Departamento de la Guajira

Colegio Helión Pinedo Ríos. Riohacha.
Colegio Livio Reginaldo Fishioni. Riohacha.
Colegio La Divina Pastora Riohacha.
Colegio Santa Catalina de Sena. Maicao.
Normal Superior San Juan del Cesar.

Departamento del Huila

INEM Julián Motta Salas. Neiva.
Liceo Santa Librada. Neiva.
Normal Superior. Neiva.
Normal Superior. Gigante.

Departamento del Meta

Normal Superior María Auxiliadora. Granada.
Colegio Enrique Olaya Herrera. Puerto López.
INEM Luis López de Mesa. Villavicencio.
Unidad Educativa de Cabuyaro. Cabuyaro.

Departamento del Magdalena

Normal Superior San Pedro Alejandrino. Santa Marta.
Colegio de Bachillerato de Bonda. Bonda.
Liceo Antonio Nariño. Santa Marta.
Normal de Señoritas. Santa Marta.

Departamento de Nariño

INEM Mariano Ospina Rodríguez. Pasto.
Colegio Ciudad de Pasto. Pasto.
Liceo Central Femenino. Pasto.
Colegio San Bartolomé de la Florida. La Florida.
Colegio Nacional Sucre. Ipiales.
Normal Superior. Pasto.
Colegio María Goretti. Pasto.

Departamento de Norte de Santander

Colegio Nacional de Bachillerato. Cúcuta.
Colegio Departamental Integrado Once de Noviembre. Los Patios.
Colegio Femenino Departamental de Bachillerato. Cúcuta.
Colegio Departamental Carlos Pérez Escalante. Cúcuta.
Normal Superior María Auxiliadora. Cúcuta.

Departamento del Putumayo

Colegio Alvernia. Puerto Asís.
Colegio Nacional Pío XII. Mocoa.
Colegio Agropecuario Guillermo Valencia. Villagarzón.
Colegio Fray Bartolomé de Igualada. Sibundoy.

Departamento del Quindío

Instituto Técnico Industrial. Armenia.
Normal Superior. Armenia.
Colegio los Fundadores. Montenegro.
Institución Educativa Ciudadela Henry Marín Granada. Circasia.
Instituto Tebaida. La Tebaida.
Colegio Teresita Montes. Armenia.

Departamento de Risaralda

Instituto Técnico Superior. Pereira.
Normal Superior de Risaralda. Pereira.
Instituto Técnico Industrial Nacional. Santa Rosa.
Colegio Pablo Sexto. Dosquebradas.

Departamento de Sucre

Liceo Carmelo Percy Vergara. Corozal.
Colegio Antonio Lenis. Sincelejo.
Normal Superior de Corozal. Corozal.

Departamento de Santander

INEM Custodio García Rovira. Bucaramanga.
Centro educativo Las Américas. Bucaramanga.
Escuela Normal Superior. Bucaramanga.
Instituto Santa María Goretti. Bucaramanga.
Colegio Vicente Azuero. Floridablanca.
Colegio Nacional Universitario. Socorro.

Departamento del Tolima

Instituto Técnico Industrial Jorge Eliécer Gaitán Ayala. Líbano.

Colegio Nuestra Señora de las Mercedes. Icononzo.

Colegio Nacional San Simón. Ibagué.

Normal Superior. Ibagué.

INEM Manuel Murillo. Ibagué.

Colegio de Bachillerato Comercial Camila Molano. Venadillo.

Institución Educativa Santa Teresa de Jesús. Ibagué.

Departamento del Valle

Colegio Joaquín Caicedo y Cuero. Cali.

Normal Superior de Señoritas. Cali.

Colegio Manuel María Mallarino. Cali.

Colegio Mayor. Yumbo.

Instituto Técnico Industrial Humberto Raffo Rivera. Palmira.

Escuela Normal Superior Santiago de Cali. Cali.

AGRADECIMIENTOS

La Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media del Ministerio de Educación Nacional agradece de manera especial:

- A los niños y niñas colombianos de las diversas regiones que, con su inteligencia, talento y capacidad creativa, vienen aprovechando las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías para aprender matemáticas con sentido para sus vidas y que nos han permitido construir e implementar situaciones y propuestas para el estudio de la geometría, con mediación de tecnologías computacionales.
- A los coordinadores del proyecto que han dinamizado el trabajo a nivel regional permitiendo la construcción de situaciones para el trabajo de aula en geometría, con mediación de tecnologías computacionales.
- A los maestros y maestras del país que han asumido el compromiso de avanzar en el diseño, implementación y evaluación de las situaciones de aula.
- A las Universidades que han asumido el liderazgo regional y el acompañamiento a los procesos de desarrollo, innovación e investigación en el uso de nuevas tecnologías en la Educación Matemática.
- A las Secretarías de Educación Departamentales, Distritales y Municipales que han asumido el liderazgo y gestión de los procesos de incorporación de nuevas tecnologías informáticas en sus territorios.
- A los consejos directivos y rectores de las instituciones educativas de básica y media que han hecho posible la generación de condiciones para la implementación y sostenibilidad del proyecto en sus instituciones.
- A los padres de familia que consientes de la necesidad de aproximar a las nuevas generaciones en conocimientos y experiencias en punta, han apoyado y contribuido a la incorporación de nuevas tecnologías en la educación matemática.
- A los investigadores e innovadores que vienen aportando en la generación de conocimiento y experiencias significativas sobre el uso de nuevas tecnologías en la educación matemática.

CONTENIDO

INSTITUCIONES PARTICIPANTES.	XI
AGRADECIMIENTOS.	XIX
CONTENIDO.	XXI
PRESENTACIÓN.	XXIII
INTRODUCCIÓN.	XXV

CAPÍTULO 1

LA IMPORTANCIA DE ENSEÑAR GEOMETRIA.	1
---	----------

CAPÍTULO 2

EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRIA.	5
---	----------

CAPÍTULO 3

EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA.	9
3.1. Procesos de visualización.....	10
3.1.1 Nivel global de percepción visual.	10
3.1.2. Nivel de percepción de elementos constitutivos.....	10
3.1.3. Nivel operativo de percepción visual.	13
3.2. Procesos de argumentación.	14
3.3. La construcción geométrica como encadenamiento “natural” de los procesos de visualización y los procesos de argumentación.....	16

CAPÍTULO 4

POTENCIAL DIDÁCTICO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA.	19
4.1 ¿Qué es un software de geometría dinámica?.	19
4.2 Características fundamentales de software de geometría dinámica.	19
4.3 Principios fundamentales para trabajar con geometría dinámica.....	23
4.4 Aspectos específicos del potencial de la geometría dinámica para el desarrollo del pensamiento geométrico	24
4.4.1 Articulación entre procesos de visualización y procesos de argumentación.....	25
4.4.2 Diferenciación entre dibujo y objeto geométrico.	27
4.4.3 La problematización de las construcciones geométricas.	29
4.4.4 Dinámica entre la exploración y la sistematización.	34
4.4.5 Lugares Geométricos y curvas notables de la Geometría.....	38
4.4.6 Uso de entornos de geometría dinámica en la validación.	40

4.4.7 Conexión con otros campos de la matemática: La modelización
y la simulación.....47

CAPÍTULO 5

ALGUNAS EXPERIENCIAS DE AULA CON TECNOLOGÍA DE DOCENTES DEL PROYECTO.....51

5.1 La construcción de las funciones trigonométricas.52

5.2 Generalización del teorema de Pitágoras.57

5.3 Bisectrices e incentro.59

5.4 Construcción de paralelogramos.61

5.5 Construcción del Símbolo ying-Yang.64

5.6 Construcción del rectángulo.....66

5.7 Construcción de un Triángulo equilátero73

5.8 Construcción de triángulos isósceles.....77

5.8 Argumentación en torno a una figura.81

A MANERA DE CONCLUSIÓN.89

BIBLIOGRAFÍA.....91

PRESENTACIÓN

El Ministerio de Educación Nacional, comprometido con el mejoramiento de la calidad de la educación y respondiendo de manera efectiva a las necesidades, tendencias y retos actuales de la educación matemática, viene adelantando, desde el año 2000, la implementación del proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia*, con el cual se viene instaurando una nueva cultura informática en el país aprovechando el potencial formativo que brindan las tecnologías computacionales, específicamente los sistemas computacionales gráficos y algebraicos.

La columna vertebral del proyecto ha sido la formación permanente de los docentes, centrada en la reflexión sobre su propia práctica en el salón de clase y en las posibilidades pedagógicas y didácticas del recurso tecnológico. La dinámica lograda viene impulsando la conformación de grupos de estudio regionales con profesores de matemáticas de la educación secundaria y media, de las universidades y con profesionales de las Secretarías de Educación, de manera que se ha enriquecido la reflexión teórica y la experiencia práctica y se han creado condiciones de sostenibilidad a largo plazo.

Las posibilidades que brindan las tecnologías computacionales (computadores y calculadoras gráficas y algebraicas), como instrumentos mediadores en el aprendizaje de los alumnos, en la construcción de conocimientos y en la comprensión de lo que hacen, viene impulsando

en el país una verdadera revolución educativa, una oportunidad para acceder a la información y al conocimiento universal y la transformación de las escuelas desde las particularidades de las diferentes regiones que integran el país.

Hoy tenemos maestros más creativos y comprometidos con su ejercicio profesional, estudiantes activos e interactivos haciendo matemática y colocando en juego todo su talento en horarios de clase y extra clase, comunidades educativas que en ejercicio de su autonomía se han cohesionado en torno a la incorporación de tecnologías, una adecuada articulación entre los niveles educativos básico, medio y superior, en síntesis, una gama de opciones alternativas que nos permite creer firmemente que la educación matemática será cada día de mejor calidad.

El documento que entregamos a la comunidad es el resultado de un proceso de construcción y reflexión sobre el pensamiento geométrico y los aportes de las tecnologías computacionales para potenciar su desarrollo, que se ha venido adelantando sustentado en el reconocimiento sistemático del trabajo de aula con tecnología. Constituye una contribución al desarrollo de innovaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría, un área fundamental para la formación del ser humano, que en algunos casos no recibe el énfasis y el tratamiento pedagógico que amerita en el currículo.

Los autores

INTRODUCCIÓN

Con el auge de las tecnologías de la información han surgido nuevas herramientas para el trabajo tanto en geometría como en su enseñanza que es importante conocer y utilizar para poner a tono nuestros métodos pedagógicos con las nuevas posibilidades de aproximación cognitiva que la sociedad nos brinda. En particular, los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación.

Estos programas tienen como principio base el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas, las relaciones entre éstos y las propiedades que presentan. A partir de la construcción de figuras geométricas se permite a los alumnos la exploración y manipulación directa y dinámica que conduce a la elaboración de conjeturas. Esta experiencia les sirve para desarrollar las habilidades mentales que les posibilitarán acceder posteriormente al estudio formal de la geometría.

Con el acceso a la manipulación directa, la enseñanza de la geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización de ésta, como el estudio de las propiedades invariantes de las figuras geométricas. Al permitir la posibilidad de experimentar con una especie de “materialización” de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. Por consiguiente, es

natural esperar que los estudiantes que trabajen con un programa de geometría dinámica puedan avanzar en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que seguirían si utilizan medios tradicionales.

La diferencia sustancial con ambientes de aprendizaje tradicionales estriba en la posibilidad de modificar la construcción realizada originariamente por medio de dos funciones específicas: “arrastre” y “desplazamiento” de las figuras, realizadas por medio de una “mano” que atrapa los puntos libres. Así, cada figura construida se convierte en realidad en una colección de figuras que comparten las propiedades invariantes que las caracterizan. Por ejemplo, si se dibuja una circunferencia con uno de sus radios y una recta perpendicular a éste (y por lo tanto tangente a la circunferencia) y luego se cambia el tamaño de la circunferencia, la relación de tangencia se mantendrá. En realidad no se han construido una circunferencia, un radio y una recta tangente a ella, sino una familia de circunferencias, radios y tangentes que mantienen constante la relación establecida.

Ha de diferenciarse entonces entre una figura geométrica y su dibujo. En un dibujo no están implícitamente presentes las relaciones de dependencia entre los elementos de la figura que la caracterizan, a pesar de que perceptualmente parezcan estar. Si no se ha tenido la precaución de hacer la construcción atendiendo a estas relaciones, al utilizar las funciones de “arrastre” y “desplazamiento” de los puntos libres, la figura se deformará. Se puede definir

una figura geométrica como un conjunto finito de objetos elementales y de relaciones entre esos objetos. En general, los objetos elementales de la geometría euclidiana plana son: el punto, la recta, la semirrecta, el segmento, la circunferencia y el arco de circunferencia. Si se miran los objetos básicos de un programa de geometría dinámica, se encuentran todos los objetos precedentes. Las relaciones entre objetos son relaciones de pertenencia, de intersección, de paralelismo o de perpendicularidad que figuran todas en el programa.

En este contexto, el propósito de este documento es crear conciencia de las grandes posibilidades que brindan estos programas para el aprendizaje y dar orientaciones a los maestros sobre cómo diseñar situaciones problema aprovechando las potencialidades didácticas del *software* de geometría dinámica.

En el capítulo 1 se hace una reflexión sobre la importancia del conocimiento geométrico en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo.

En el capítulo 2 se presenta una breve síntesis de la evolución de la geometría para mostrar como ella se encuentra en permanente crecimiento y abarca un panorama extenso de desarrollos y posibilidades ligadas a la interacción entre lo visual y lo discursivo.

El capítulo 3 se centra en los procesos de aprendizaje de la geometría, sus obstáculos y dificultades.

En el capítulo 4 se desarrollan algunas ideas respecto a los ambientes, contextos, situaciones y actividades apropiados para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, con particular énfasis en el apoyo de *software* de geometría dinámica.

En el capítulo 5 se recogen las primeras experiencias en el aula de algunos docentes que participan en el proyecto “*Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia*”

1

LA IMPORTANCIA DE ENSEÑAR GEOMETRIA

El conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo. No sólo se considera como una herramienta necesaria para describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar en él, sino que, como disciplina científica, descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad. Mammana y Villani (1998)¹ han identificado las siguientes dimensiones, que en estrecha vinculación unas con otras y vinculadas también con los demás campos de las matemáticas, las ciencias y la vida cotidiana, aportan elementos para el logro de dicha formación. La geometría puede verse como:

- Una ciencia del espacio y la forma. Desde sus raíces como herramienta para describir y medir figuras, se han ido constituyendo teorías, ideas y métodos mediante los cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados del mundo físico o de fenómenos que acontecen en el mundo real.
- Un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra o el cálculo, o de otras ciencias naturales y sociales.
- Un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación.

- Una vía para desarrollar pensamiento y comprensión, y, en un nivel avanzado, como una teoría formal.
- Un ejemplo paradigmático para enseñar razonamiento deductivo.
- Una herramienta en diversos campos de aplicación, tanto en forma tradicional, como de manera innovativa mediante el uso de recursos computacionales.

La toma de conciencia de esta multidimensionalidad, en la última década, es debida probablemente al cambio en el punto de vista de la matemática en sí misma, (que ha comenzado a verse más como una actividad humana que como una teoría formal) y de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a nivel escolar (Neubrand, 1998). Hoy en día se reconoce la necesidad de fomentar el aprendizaje activo, disminuir las separaciones tradicionales entre las diversas asignaturas del currículo y establecer conexiones de la matemática con los contextos de las ciencias naturales y sociales.

La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona

¹ Recogiendo las ideas del Documento de Discusión del estudio del ICMI, Perspectivas de la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI. Mammana y Villani, p. 338.

permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. Ella es el resultado de una combinación entre diversos procesos cognitivos asociados a la actividad geométrica y la comunicación de los resultados de dicha actividad. En ese sentido, el conocimiento geométrico no existe únicamente en los enunciados formales ni puede considerarse como algo absoluto e impersonal. Por el contrario, se convierte en algo relativo a las experiencias individuales y grupales que, mediadas por diversas herramientas materiales o simbólicas producen diversos niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas.

Diffícilmente otro campo de las matemáticas abarca un espectro tan amplio de dimensiones. Por ello la enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos. También ofrece amplias oportunidades de usar modelos matemáticos para comprender la actividad humana y social, dadas sus estrechas relaciones con la cultura, la historia, el arte, la filosofía y la ciencia. Adicionalmente, no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas.

Por supuesto, según el nivel escolar se privilegiará una u otra dimensión de la geometría. Niss (1998) sugiere enfatizar en los primeros niveles educativos en actividades de exploración, deno-

minación, descripción, clasificación y representación de objetos concretos del plano y del espacio y explorar movimientos en el plano para acceder a nociones básicas acerca de las transformaciones, la identificación de trayectorias y la ubicación espacial; es decir, enfatizar en una dimensión empírica de la geometría, que tiene que ver con la representación del espacio vital. Sin embargo, para evitar que los alumnos tengan una idea limitada de la geometría, conviene ir dando puntadas hacia la comprensión de las demás dimensiones, mediante actividades que muestren, por ejemplo, de qué manera algunas de las propiedades esenciales del espacio físico pueden deducirse de una exploración de regularidades o “probarse” mediante algún razonamiento, o de qué manera la geometría se convierte en una excelente herramienta para comprender reglas y operaciones aritméticas. Además los alumnos deben poder observar cómo la visión humana está gobernada por reglas que nos permiten reconocer la estrecha relación entre un objeto y su imagen obtenida por semejanza, por su representación bidimensional, o en perspectiva. La comprensión de las relaciones entre los objetos tridimensionales y sus representaciones bidimensionales es de gran importancia como fundamento de la comprensión acerca del conocimiento geométrico trabajado posteriormente.

En los niveles superiores de la educación básica y en la educación media, se recomienda en cambio, afianzar conocimientos más amplios y profundos, de tal forma que los estudiantes puedan experimentar con gran cantidad de ejemplos y situaciones, en una gran variedad de contextos geométricos, ampliando el espectro de dimensiones a trabajar. A través de actividades como la construcción de definiciones de conceptos, la investigación de propiedades geométricas, la búsqueda de mecanismos para probar enunciados y la resolución de problemas de aplicación, se profundiza en sus experiencias y conocimientos geométricos y es posible

comenzar a experimentar con diferentes teorías geométricas y sus interrelaciones, además de las formas para validar los resultados en cada una de ellas. Especial importancia cobran las experiencias en diferentes ámbitos tales como la construcción de modelos geométricos físicos y su relación con la percepción visual, la representación de objetos en dos y tres dimensiones, la exploración acerca de propiedades geométricas o la construcción de la geometría euclidiana deductiva y su relación con la geometría analítica o vectorial, o la geometría de las transformaciones.

Las diversas dimensiones del panorama geométrico se apoyan en los procesos cognitivos de visualización (asociados al pensamiento espacial) y procesos de razonamiento discursivo en el lenguaje natural tipo verbal (asociados con el pensamiento deductivo). Por tal razón, en los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) se enfatiza, por un lado, en la necesidad de encaminar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo de la percepción espacial, las representaciones bi y tri dimensionales de las figuras y el estudio de los invariantes de las figuras, sus relaciones y sus propiedades bajo el efecto que producen las diferentes transformaciones sobre ellas. Por otro lado, se propone un estudio sistemático de patrones de regularidad que conducen al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, a partir de las cuales surgen diversas formas argumentativas que poco a poco van alcanzando mejores niveles de sofisticación hasta llegar a la producción de teorías axiomáticas de carácter deductivo.

Sobre los procesos de visualización y de razonamiento discursivo descansan otros procesos presentes en toda actividad matemática, que fueron ampliamente descritos en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración

y ejercitación de procedimientos. A su vez, estos procesos están estrechamente ligados a las dimensiones de la geometría reconocidas por Mammana y Villani. Por ejemplo, la resolución de problemas conjuga ambos procesos y está vinculada a la dimensión empírica de la geometría, por su papel en la indagación de las propiedades de los objetos naturales o creados por el hombre, a través de la modelación. La comunicación tiene que ver con el potencial de la geometría para comunicar información visual de hechos no necesariamente geométricos. La representación se encuentra en estrecha conexión con el potencial humano de visualizar y la búsqueda de mecanismos de argumentación para lograr justificar afirmaciones se encuentra asociado al razonamiento discursivo.

Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida.

Actualmente, los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación. Usando *software* de geometría dinámica ahora es posible que los estudiantes exploren la geometría euclidiana y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para re descubrir teoremas por ellos mismos. A partir de hacer, examinar, predecir, evaluar y generalizar, los estudiantes pasan de formularse preguntas como ¿por qué...? a preguntas como ¿qué pasa si...?, dando pasos hacia el pensamiento deductivo.

Cuando una disciplina como la geometría abarca tantas dimensiones, cabe hacer algunas reflexiones de carácter histórico que sirvan para comprender su proceso de crecimiento, y el papel que ha jugado en el desarrollo cultural de los diferentes ámbitos de la vida social. Hemos mencionado ya la estrecha relación de la geometría con las actividades humanas. Según Mammana y Villani (1998) esta relación ha permitido ir desarrollando la geometría tanto en sus aspectos puramente *visuales* como en los *conceptuales y abstractos*. En efecto, desde tiempos inmemoriales ella ha acompañado las producciones humanas, incluso desde la prehistoria cuando nuestros antepasados comenzaron a reproducir los distintos aspectos de su realidad utilizando dibujos o comenzaron a adornar sus pertenencias con motivos geométricos simples o producidos por medio de simetrías. Igualmente cuando empezaron a hacer sus primeras construcciones, comenzaron a disponerlas en forma geométrica. Según estos autores en este primer momento, el aspecto *visual* de la geometría es predominante.

Con la expansión de las comunidades y el surgimiento de importantes civilizaciones como la china, india, egipcia, griega, maya y azteca se buscó un mejoramiento en la estructura general y la organización de la vida social. Durante ese periodo histórico la geometría respondió principalmente a *necesidades utilitarias* de medición de longitudes, áreas y volúmenes, o del trazo de linderos en la tierra. Además, jugó un papel

instrumental fundamental con respecto a otras esferas del conocimiento como la arquitectura, la geografía y la astronomía. Como lo señalan Mammana y Villani, (2000) en esta etapa se percibe un primer intento de racionalización, al menos *localmente* del conocimiento geométrico adquirido. En los documentos dejados por esta civilización acerca de fórmulas para el área de regiones planas o volúmenes de sólidos, o sobre el estudio de movimientos de los cuerpos celestes, se entretienen aspectos *visuales e instrumentales*. Alsina et al (1997) recalcan que desde las tablillas babilónicas a los papiros egipcios, cuando se trató de “escribir” un problema geométrico, se inició la tradición de mezclar en las producciones escritas imágenes, símbolos especiales y el lenguaje natural para comunicar ideas.

Con los griegos y por motivos históricos y culturales la geometría dejó su carácter empírico y el objetivo primordial de resolver necesidades prácticas dio paso a la constitución de una disciplina científica, al abarcar procesos de racionalización abstractos y globales. La obra cumbre, *Los Elementos*, escrita por Euclides hacia el año 300 a.C. recoge una excelente sistematización de estos desarrollos que se continúan con los trabajos de Apolonio, Arquímedes y Tolomeo. En esta nueva etapa, el interés se concentró en los aspectos *conceptuales* de la geometría y esta se empezó a ver como un sistema axiomático de carácter deductivo.

Debido a la perfección del tratado de Euclides, este libro se convirtió en modelo de una sistematización racional para todos los campos del conocimiento. Así, por muchos siglos, la geometría de Euclides se enseñó como una de las disciplinas más importantes para la formación cultural de los escolares, desde la edad media hasta el renacimiento y aún mucho más tarde. Este hecho inhibió otros progresos dentro de la geometría misma, produciéndose una subordinación del conocimiento geométrico durante casi 2000 años, al esquema Euclidiano. Tal fue el grado de influencia de la geometría de Euclides que muchos de nosotros hoy en día creemos que los griegos y sus antepasados *descubrieron* toda la geometría conocida. Sin embargo, como se menciona más adelante, muchos de los resultados más interesantes de la geometría euclidiana se desarrollaron en los siglos XIX y XX.

Sólo después de muchos siglos de producción en esa línea de trabajo surgieron nuevas ideas en la investigación geométrica, a partir de trabajos que se consideraban de origen externo a la geometría de Euclides. Por ejemplo, durante el siglo quince se desarrolló la geometría proyectiva, gracias a artistas del renacimiento, de la talla de Leonardo da Vinci, interesados en la estética, ampliando la dimensión artística de la geometría, desarrollada por las comunidades primitivas. Durante el siglo XVII lo que nació como un método artístico se convirtió en la base de una nueva geometría que combinó métodos algebraicos con descripciones sintéticas de formas y transformaciones (Alsina et al. 1997), surgiendo entonces la geometría analítica, de una mezcla de geometría y álgebra; y hacia el final del siglo XVIII debido al estudio sistemático realizado por Monge de los métodos de representación de objetos tridimensionales por medio de dibujos, surgió la geometría descriptiva. Estas áreas de la geometría combinan a su vez aspectos *visuales* y *conceptuales* del conocimiento.

Sin embargo, todos estos desarrollos de la geometría se consideraron ajenos al espíritu de la geometría de Euclides y por lo tanto no interfirieron con la incuestionada autoridad del tratado de Euclides y su dimensión formal. Fue necesario esperar hasta el siglo XIX para lograr un avance más allá de la geometría euclidiana, gracias al desarrollo de las geometrías no euclidianas de Bolyai-Lobachevsky y Riemann. Los axiomas anti intuitivos de estas dos geometrías revolucionaron la comprensión de los matemáticos respecto de los axiomas. Estos, que habían sido considerados como "*verdades evidentes*", comenzaron a verse como "*puntos de partida necesarios*" para los sistemas matemáticos. Así, se liberó a la geometría de su carácter de modelo del mundo real y del criterio de aplicabilidad de sus resultados a la vida cotidiana, dando paso a diversas variantes de la geometría de Euclides, llamadas geometrías euclidianas, y a todo tipo de otras geometrías no euclidianas, cada vez más alejadas de consideraciones visuales. Muchos de los resultados más interesantes de la geometría euclidiana se trabajaron durante los siglos XIX y XX. Por ejemplo, los teoremas de Morley, Miquel, Feuerbach, Steiner, entre otros (De Villiers, 1999).

El desarrollo de las geometrías no euclidianas motivó un debate filosófico acerca de las fuentes de certeza del conocimiento. Después de haber creído que las matemáticas trataban de "*verdades absolutas*" en relación con el mundo real, los matemáticos se dieron cuenta que las matemáticas tratan de "*verdades convencionales*" que pueden o no, tener aplicaciones en el mundo real. La toma de conciencia de la posibilidad de imaginar alternativas a la geometría euclidiana conllevó en un cierto sentido, a una pérdida de protagonismo atribuido a la geometría de Euclides, dentro de las matemáticas y dentro del conocimiento científico en general, y generó el interés por la búsqueda de consis-

tencia de las teorías propuestas. Así, la geometría se dirigió más por los caminos conceptuales que por los visuales.

Por otra parte, las geometrías no euclidianas contribuyeron a estimular una nueva era de investigación en los fundamentos de la geometría, que culminó con el Programa Erlangen de Felix Klein, quien en 1872, describió la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo varios grupos de transformaciones y la publicación de los *Fundamentos de la Geometría Hilbert* en 1899. Estos trabajos mostraron un nuevo punto de vista caracterizado por un alto nivel de abstracción, y la consecuente pérdida de relaciones de la geometría con la realidad perceptible. La investigación en geometría se dirigió hacia la fundamentación algebraica de la misma.

En los años siguientes a la publicación de los *Fundamentos de Geometría de Hilbert*, la investigación en aspectos algebraicos de la disciplina adquirió un papel cada vez más importante, gracias a la construcción rigurosa de la teoría de los números hecha por Dedekind, Cantor y Weierstrass, en la cual el fundamento de la “certeza” se derivó del álgebra y no de la geometría. Así, mientras hasta ese momento las “certezas” del álgebra se derivaban de supuestas certezas en geometría, al final del siglo diecinueve el punto de vista cambió radicalmente: desde entonces es el álgebra la que proporcionó el modelo firme para la geometría. De esta manera, surgieron objetos geométricos completamente ajenos a la experiencia sensorial como las estructuras abstractas de dimensiones arbitrariamente grandes y las líneas que cubren el plano, entre otras. El comienzo del siglo XX dio lugar a la creación de nuevas herramientas algebraicas para un estudio general de los objetos geométricos, entre las cuales se destaca la teoría

de los espacios vectoriales, que contribuyó a una mayor ganancia en abstracción y generalidad, y un mayor distanciamiento de la intuición geométrica.

En décadas recientes, con el desarrollo tecnológico que permite el análisis numérico y el tratamiento *visual* de gran potencial, se está experimentando un interés renovado en los aspectos visuales de la geometría. Aunque inicialmente estas investigaciones crecieron, en su mayoría, en un medio externo a la comunidad matemática, han sido origen de nuevos campos de investigación geométrica. Por ejemplo, el artista holandés Maurits Escher utilizó las teselaciones de manera extensiva en la producción de sus obras de arte en el período de 1937-1971 lo que motivó un renovado interés entre los matemáticos por el estudio de las teselaciones y cenefas. Así, en años recientes Grunbaum y Shepherd (1986) produjeron una investigación sistemática que en cierto grado es equiparable a los *Elementos* de Euclides, una de cuyos soportes conceptuales más importantes es la idea de simetría (de Villiers, 1999).

Otro desarrollo interesante de los últimos años es la geometría fractal, que consiste en el estudio de objetos geométricos “auto semejantes” de dimensiones fraccionarias. Este campo de trabajo se desarrolló proveniente de los estudios en ciencias naturales pues muchos objetos de la naturaleza como las nubes, las líneas costeras, las hojas de helecho, las cadenas montañosas, los árboles, los cristales, etc. tienen propiedades fractales. La compresión fractal de imágenes es imposible sin el apoyo de la tecnología computacional.

En los últimos años se han desarrollado y ampliado otras teorías geométricas como la teoría de nudos y sus aplicaciones a la biología, el uso de la geometría proyectiva para el diseño

de programas de realidad virtual, la aplicación de la teoría de códigos para el diseño de unidades de CD. Incluso la geometría de las pompas de jabón está siendo estudiada y se le ha dedicado sesiones especiales en diversas revistas de matemáticas.

También la geometría euclidiana está experimentando un renacer en gran parte debido al desarrollo reciente de paquetes computacionales de geometría dinámica. Por ejemplo, Davies (1995) investigó nuevas posibilidades de construcción de teorías alrededor de la geometría del triángulo y Adrian Oldknow (1995, 1996) utilizó el software *Sketchpad* para encontrar nuevas relaciones entre puntos de concurrencia asociados a líneas notables de los triángulos.

En síntesis, con este breve recorrido histórico queremos destacar los siguientes aspectos:

- Si bien la geometría es una disciplina científica, y como tal puede estructurarse en un esquema axiomático deductivo, está íntimamente relacionada con nuestra percepción espacial y encuentra su fuente de significado en ella, bien sea para afinarla o para superarla.
- Los avances en geometría no provienen únicamente de las investigaciones en matemáticas, sino que tienen una gran variedad de fuentes: las artes, los oficios, la técnica, las ciencias. Este hecho destaca el carácter vivo de la geometría y su riqueza cultural, que se traducen en una riqueza de relaciones que pueden utilizarse para su aprendizaje. En ella se puede avanzar desde la percepción de los objetos y sus propiedades pasando por el mundo de las formas en las que se perciben prototipos en clases separadas y se trabaja con representaciones realizadas a mano alzada, por el mundo de la geometría práctica en donde se clasifican los objetos del mundo real en forma jerárquica y se proponen construcciones geométricas, el mundo de la geometría euclidiana cuyos objetos son los objetos idealizados del mundo platónico y se trabaja la prueba euclídea y finalmente se llega al mundo formal donde los objetos son definidos formalmente y sólo se acepta la prueba deductiva.
- Durante muchos siglos la geometría se constituyó en la base de toda ciencia, pero ante la necesidad de superar los obstáculos de la percepción y de la intuición para dar un fundamento exclusivamente racional a la ciencia, perdió su papel protagónico para cederlo al análisis y el álgebra. De este movimiento de fundamentación heredamos una cierta “desconfianza” hacia la geometría en detrimento del álgebra como herramienta de matematización. De allí heredamos la utilización de la geometría en el campo educativo como terreno natural para la introducción de la deducción, olvidando a veces los obstáculos que se presentan precisamente para este desarrollo y las otras posibilidades de formación que ofrece.
- El renacer de los aspectos visuales, gracias al potencial de los recursos informáticos, ha puesto nuevamente en equilibrio los procesos de visualización y los procesos de justificación que permiten trabajar en geometría significativamente, y potencian su aprendizaje.

La historia de geometría nos muestra de qué manera ha sucedido su evolución en una dinámica soportada por la interacción entre procesos de visualización, (ligados al pensamiento espacial), procesos de justificación, (ligados al pensamiento deductivo) y aplicaciones instrumentales que se llevan a cabo con el objeto de resolver problemas de la vida cotidiana, las ciencias o la misma matemática, modelar el mundo para interpretarlo, ampliar los horizontes conceptuales con teorías construidas axiomáticamente e interrelacionar campos diversos de conocimiento buscando en ellos una estructura común, entre otras cosas.

Para tener acceso a este vasto campo de desarrollo humano es necesario aprender geometría. Surgen entonces interrogantes como los siguientes:

¿por qué vías es posible lograr experiencia geométrica?, ¿cómo se llega a la conceptualización de nociones geométricas?, ¿cómo se adquiere comprensión y habilidad para usar procedimientos geométricos?, ¿qué implica razonar en geometría?

La investigación en este campo (de Villiers (1999), Moreno (2002), Duval (1998), Herscovitz y Vinner (1987)) ha llevado a reconocer que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo que pone en tensión ciertos polos del desarrollo cognitivo:

- Los procesos cognitivos de visualización y los procesos de justificación de carácter informal o formal.

- Los procesos de dar significado a los objetos y propiedades geométricas y los procesos de generalización y abstracción propios del conocimiento matemático que dan lugar a la descontextualización de dichos objetos.
- Los dominios empíricos de la geometría y los dominios teóricos.

Según como se desarrollen estas tensiones se accederá, o no, al conocimiento geométrico genuino y útil no sólo por su potencial en la resolución de problemas de las ciencias naturales, la técnica o la vida cotidiana sino como plataforma de lanzamiento hacia el desarrollo teórico del ámbito matemático cuyas fronteras de conocimiento son infinitas. Focalizar la atención en el aprendizaje conduce a estudiar las formas mediante las cuáles los estudiantes se expresan matemáticamente y los mecanismos mediante los cuales podemos afirmar que lo están haciendo. Por tal razón, centraremos nuestro análisis acerca del aprendizaje en geometría en tres aspectos que posiblemente recogen las tensiones antes expuestas: (i) los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas, (ii) los procesos de justificación propios de la actividad geométrica y (iii) el papel que juegan las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Trataremos de ilustrar que los procesos de visualización requieren, para su desarrollo, superar dificultades asociadas a las condiciones

fisiológicas propias de la percepción visual. A su vez, desarrollaremos la idea según la cual, el desarrollo de los procesos de justificación han de superar dificultades inherentes a la aparente falta de sentido de una organización deductiva del discurso. Estas dos clases de dificultades provienen precisamente de la articulación entre percepción y deducción, que se concreta en la diferenciación entre figura geométrica y dibujo. Y finalmente mostraremos que precisamente la forma más antigua de intento de superación de este conflicto es la construcción geométrica, que permite asegurar las características geométricas del dibujo.

3.1. Procesos de visualización

La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992). Está en estrecha relación con la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja.

Muchas personas creen que la visualización es una habilidad innata y una cuestión que debe permanecer al margen de la actividad educativa. Sin embargo, dado que los procesos de visualización están en la base de la actividad cognitiva en geometría el estudiante debe ir evolucionando en la “*forma de mirar*” los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización. A continuación sugerimos tres niveles de visualización que caracterizan su desarrollo, que están en franca correspondencia con los tipos de visualización propuestos por Duval (1998).

3.1.1 Nivel global de percepción visual

En el nivel más elemental de visualización encontramos la percepción global de las imágenes, que es esencial en la actividad geométrica y nos permite asociar figuras a objetos físicos. En este nivel, se destaca la forma total de la imagen. Así, por ejemplo, una representación como la de la figura 1 puede asociarse a un techo, la parte superior de una mesa, o a un cuadrado visto en perspectiva.



Fig.1

En un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas.



Fig.2

En la percepción de estas formas prototípicas predominan aspectos no matemáticos como la posición (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo (grosso, delgado). Por esta razón, este nivel debe dar paso, en la enseñanza de la geometría, lo más pronto posible, a una mirada matemática de las figuras que active la mente hacia la búsqueda de objetos geométricos y sus relaciones.

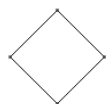
3.1.2. Nivel de percepción de elementos constitutivos

En un nivel posterior de visualización ya no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la imagen como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores. Así, una imagen tridimensional se verá como formada por figuras tridimensionales o bidimensionales, una

imagen bidimensional se verá como formada por figuras bidimensionales, unidimensionales (segmentos) o de dimensión cero (puntos).

Desde el punto de vista matemático, lo relevante para construir conceptos y relaciones geométricas, es la identificación de esos elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos. Por eso es indispensable la intervención de un enunciado que describa esas relaciones. En este nivel entonces se rompe con el esquema de imágenes prototípicas, pues la orientación o tamaño de las formas dejan de ser relevantes, para considerar en primer plano las relaciones entre los elementos constitutivos.

De esta manera, si en un primer nivel de visualización la figura 3 no es percibida como un cuadrado, en este nivel sí podrá considerarse como tal.



este es un cuadrado

fig.3

Es importante considerar que el enunciado, a pesar de no ser un recurso de representación visual, influencia la visualización. Esencialmente ayuda a re-enfocar la atención de manera que puedan percibirse aspectos que pueden pasar desapercibidos sin el enunciado. Además, permite comenzar a diferenciar entre un dibujo y una figura geométrica al aclarar qué información se puede obtener de la figura y cuál no. Cuando un dibujo como el que se presenta en la figura 3 va acompañado de un enunciado “*este es un cuadrado*” se aseguran las relaciones de congruencia y perpendicularidad entre los lados. De lo contrario, la sólo percepción de dichas relaciones no las garantiza. Convencionalmente sin embargo, ciertas

relaciones geométricas como la colinealidad de puntos, la interestancia, la relación par lineal o el hecho de tener pares de ángulos opuestos por el vértice se admiten con la sólo observación de la configuración.

En la identificación de las relaciones geométricas, un aspecto que ejerce una gran influencia es la orientación, pues hace parte de nuestra posición erguida, la cual hace entrar en juego relaciones espaciales como arriba y abajo, adelante y atrás, izquierda y derecha, y por extensión a las imágenes bidimensionales (representaciones en papel), lo horizontal y lo vertical. De esta manera, las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, por ejemplo, son más fácilmente reconocibles cuando tienen orientación vertical u horizontal. Además, el fenómeno de gravedad influencia en gran medida nuestra percepción, lo que nos hace tratar de colocar siempre las figuras con la base abajo. Una estrategia didáctica para liberar la mente de estas restricciones consiste en forzar la identificación de las relaciones antes mencionadas, en figuras cuyas posiciones no sean las estándares.

La identificación de partes constitutivas de una figura geométrica depende estrechamente del desarrollo de la percepción visual. Para una mejor comprensión de este fenómeno, es necesario profundizar un poco en dicho proceso. Desde el punto de vista fisiológico, hay una cierta predisposición a captar algunos aspectos de las imágenes, mientras que otros quedan inhibidos. Esto hace que de manera espontánea podamos percibir fácilmente algunas características de las imágenes que vemos, mientras que otras quedan “ocultas”.

Percibimos más fácilmente las figuras cerradas y cóncavas y no las figuras abiertas o convexas. La figura 4, por ejemplo, se percibirá más fácilmente como dos triángulos con un vértice común, y no como un cuadrilátero convexo.

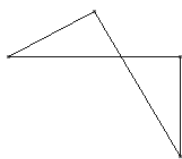


fig.4

Por otra parte, en imágenes complejas, donde puede descomponerse la figura total en distintas componentes más simples, entran en juego otros dos aspectos que inhiben o potencian la percepción: la *complementariedad* y el *solapamiento*. La complementariedad hace referencia a la característica de los componentes de la figura global de constituir la totalidad de la figura inicial, al momento de juntarse (figura 5). Si las figuras son complementarias será más fácil su percepción. El solapamiento tiene que ver con el hecho de qué las figuras que reconocemos dentro de una configuración global compartan regiones de la figura original. Si dos figuras están solapadas será más difícil su percepción. Fisiológicamente predomina la percepción de figuras complementarias y no solapadas.



fig. 5: figuras complementarias

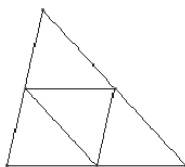


fig. 6: figuras solapadas

Así por ejemplo, en la figura 6, será más fácil percibir los cuatro triángulos, pues son complementarios y no se solapan que los tres paralelogramos que la conforman, pues estos se solapan entre sí.

La necesidad de desarrollar la percepción visual con el fin de superar las limitaciones fisioló-

gicas es ejemplificada por Samper y Leguizamón y Camargo (2000) así: “ una mirada ligera al rectángulo ABCD (figura 7) permite identificar los triángulos ΔAEB , ΔBEC , ΔCED , y ΔDEA . Solamente después de dominar cierta práctica en la visualización es posible reconocer que la figura es la unión de los triángulos ΔADC , y ΔABC o ΔADB y ΔCBD . Si la tarea es probar que las diagonales del rectángulo son congruentes, es necesario identificar los triángulos solapados ΔDAC y ΔCBD ”.

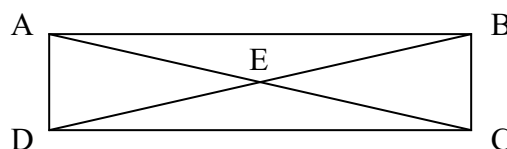


Figura 7

Finalmente, hay otro aspecto que determina fisiológicamente nuestra percepción visual y que aunque tradicionalmente no ha tenido gran incidencia en el trabajo en geometría, comienza a ser tenido en cuenta con las nuevas posibilidades de representación computarizada: el movimiento. Fisiológicamente estamos preparados para captar los cuerpos en movimiento más fácilmente que los estáticos. De hecho, el mecanismo de defensa de muchos animales consiste en mimetizarse con el medio ambiente, y mientras permanezcan inmóviles nos es muy difícil percibirlos. Este hecho se aprovecha en la propuesta curricular de geometría de los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación (MEN, 1998) donde se plantea, como recurso didáctico, el estudiar la congruencia de figuras a partir de las transformaciones isométricas del plano, aprovechando la capacidad humana de captar lo dinámico más que lo estático. De esta manera es posible ver una congruencia como el producto de una operación isométrica, o una semejanza como el resultado de una homotecia.

Como ya lo hemos mencionado, la percepción visual se va enriqueciendo con los enunciados que acompañan las figuras. Estos orientan la atención, de manera que puedan superarse posibles predisposiciones fisiológicas y se comiencen a ver las figuras matemáticamente. La enunciación verbal de características nos ayuda a centrar la atención en aspectos que no son percibidos de manera espontánea y, de esta manera, el discurso se convierte en catalizador de la percepción visual. Como lo propone Duval:

“Vemos y hablamos (en voz alta o mentalmente) sobre lo que estamos viendo. La distinción visual suscita palabras al menos implícitamente, y las palabras enunciadas mentalmente pueden cambiar el foco de atención hacia aspectos desapercibidos en la figura. Este cambio de anclaje pasa normalmente desapercibido. Desafortunadamente para la enseñanza de la geometría! Porque el alumno no tiene el mismo lenguaje interno que un matemático sobre las gestalts y configuraciones identificadas perceptivamente. Y existen relaciones entre el lenguaje interno y el razonamiento. Mirar una figura puede ser suficiente para comprender una situación geométrica o para convencerse únicamente cuando todos esos cambios pueden realizarse y se entremezclan. ¿Pero son maneras naturales y comunes de mirar cualquier representación, sea material o mental? ¿Puedo yo (alumno) ver lo mismo que usted (profesor) sin que usted me haya explicado y sin que me haya señalado que es lo que debo ver? Esa es la pregunta...” (Duval, 2000).

Hemos visto como, la exploración de diversas configuraciones en una figura proporciona información útil. En una figura geométrica es posible encontrar más subconfiguraciones que aquellas que se hacen evidentes en la construcción de la misma o en el enunciado que acom-

paña la figura. Son quizás estas últimas la que crean el poder heurístico de las figuras al dar pautas claves para identificar nuevas relaciones geométricas. Distinguir las no necesariamente es una habilidad natural por lo que hay que hacer esfuerzos educativos en ese sentido.

3.1.3. Nivel operativo de percepción visual

Es en este tercer nivel de visualización en el que podemos operar sobre las figuras, realizando verdaderas transformaciones visuales que no están necesariamente mediadas por el discurso. Es el caso, por ejemplo de las llamadas “pruebas sin palabras”. En este caso ya no se trata únicamente de la percepción de características de una configuración, sino de una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.

A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema. Un ejemplo típico de este nivel de percepción son las pruebas sin palabras del Teorema de Pitágoras (figura 8).

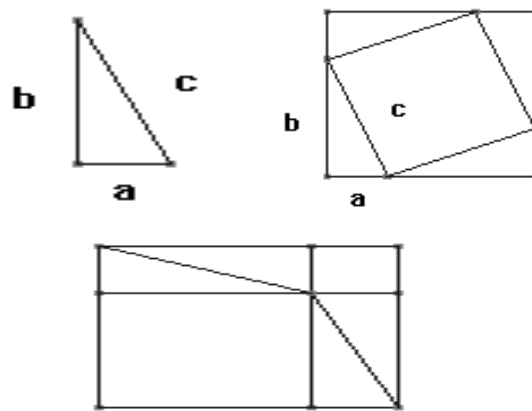


figura 8: ejemplo de demostración del teorema de pitágoras

En el triángulo rectángulo $c^2 = a^2 + b^2$. (El primer cuadrado tiene por área $(a + b)^2$, y está

conformado por un cuadrado de área c^2 y cuatro triángulos de área $ab/2$. El segundo cuadrado también tiene un área de $(a+b)^2$ y está conformado por los mismos cuatro triángulos de área $ab/2$ y dos cuadrados de área a^2 y b^2 . Por lo tanto, $c^2 = a^2 + b^2$.

En el ejemplo de la figura 8 puede verse de qué manera actúa la percepción de elementos constitutivos, en combinación con la percepción operativa. En el primer paso, a partir del enunciado del teorema se encuentra una disposición figural de un cuadrado, cuya área corresponde a la suma de las medidas de los catetos; este cuadrado contiene en su interior, otro cuadrado, cuya área es el cuadrado de la medida de la hipotenusa. En el segundo paso, la configuración se transforma variando su composición como en un rompecabezas, desplazando y reorganizando las subconfiguraciones que la conforman para obtener, dentro del mismo cuadrado inicial, dos cuadrados cuyas áreas son respectivamente los cuadrados de las medidas de los catetos.

Como ya lo mencionamos, en el contexto de un problema dado, una o varias configuraciones son relevantes mientras que otras reorganizaciones no lo son. La capacidad de visualizar en mayor o menor grado cuál es la reorganización efectiva da a la visión su poder heurístico para la solución de problemas. Pero implica el esfuerzo de reorganizar las configuraciones significativamente y usarlas para “ver” por qué una proposición matemática puede ser cierta y cómo se podría realizar una estrategia de trabajo. Veamos un ejemplo de uso del nivel operativo visual en la resolución de un problema geométrico propuesto por Duval (2000): *en la figura AC es la diagonal del rectángulo ABCD ¿cuál es la relación entre las áreas de los dos rectángulos sombreados?*

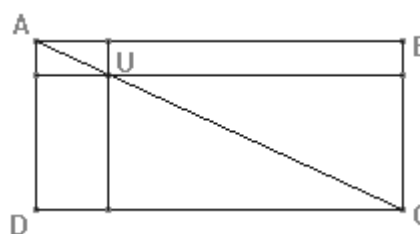


fig.9

Una solución visual típica sería:

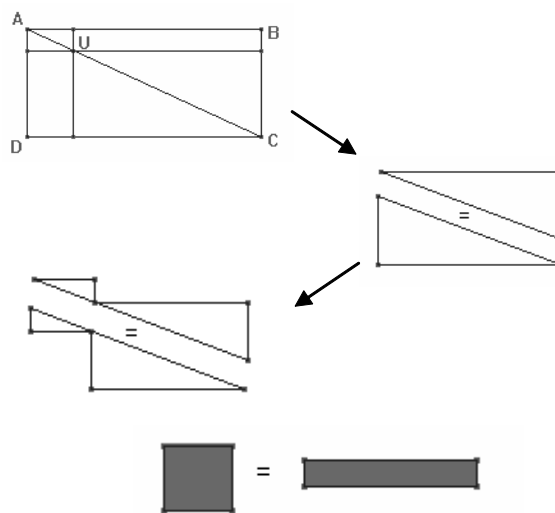


fig.10

3.2. Procesos de justificación

Ya hemos mencionado como una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría, la articulación entre los procesos de visualización y los procesos de justificación en geometría. Otro aspecto igualmente conflictivo, referenciado por Duval (1999) es el fenómeno de “falsa proximidad” entre los discursos naturales mediante los cuales nos comunicamos en otros campos de la actividad humana y los discursos deductivos, mediante los cuales se construye el discurso geométrico.

Dado que utilizamos el mismo sistema de símbolos, pareciera que la forma de construcción de un argumento para convencer a alguien

de la pertinencia de hacer algo es la misma con la cual se construye una demostración. Diferenciar los dos tipos de discursos es fundamental para el aprendiz, máxime cuando en ocasiones el discurso natural es aceptado en matemáticas y en otras ocasiones no. Este hecho puede provocar dificultades en los alumnos, que no alcanzan a apreciar la diferencia de organización de una justificación deductiva, puesto que es asimilable a cualquier otro argumento del lenguaje natural.

Al ir avanzando en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben ir cambiando la organización discursiva de su razonamiento para ir ganando en precisión, perfeccionando el lenguaje geométrico, introduciendo encadenamientos lógicos, accediendo a la estructura deductiva. Por lo tanto, la transformación del discurso debe llevar de una argumentación informal que se apoya fuertemente en la visualización, y por lo tanto es de carácter descriptivo, a una organización discursiva formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas. En este proceso se pasa por el proceso de precisión del lenguaje, en el que es imprescindible enunciar definiciones y teoremas.

La organización de un discurso informal, de carácter descriptivo es bien diferente a la organización de un discurso formal. En el primer caso, se ligan proposiciones o enunciados a partir de la visualización de una figura y sus configuraciones, por asociaciones evidentes y espontáneas tal como argumentamos al conversar. Las asociaciones entre enunciados se explicitan mediante una descripción que muestra equivalencias u operaciones entre subconfiguraciones para producir otras. En el problema propuesto por Duval que presentamos en la sección anterior, una argumentación informal de la equivalencia de las áreas de los rectángulos sombreados sería algo como:

- en el rectángulo ABCD se distinguen dos triángulos congruentes ΔABC y ΔADC , resultado de dividir el rectángulo mediante una diagonal.
- si se elimina la porción sombreada en cada uno de los triángulos, se obtienen dos figuras compuestas por dos triángulos que son respectivamente congruentes.
- como han quedado dos regiones de igual área, las regiones que se eliminaron, es decir, los rectángulos sombreados, también deben tener igual área.

En el caso de la organización de discursos formales la situación es muy diferente. En primer lugar el razonamiento no se centra en una descripción basada en la visualización de una figura; las figuras sólo brindan un escenario para articular el discurso que comienza cuando se declara la relación entre dos proposiciones mediante una inferencia del tipo *Si... , entonces...* La organización del discurso requiere hacer uso únicamente de proposiciones que de antemano tienen un estatus teórico específico (axiomas, definiciones, teoremas) y conducen un paso adelante hacia las conclusiones. Así, las proposiciones se ligan de acuerdo con su estatus y la organización funciona por sustitución de proposiciones como en el cálculo y no por asociaciones como en el lenguaje informal.

En el problema que nos ocupa, un encadenamiento deductivo se replantearía así: *si AC es la diagonal del rectángulo ABCD, las áreas de los rectángulos sombreados son iguales.* El encadenamiento deductivo podría ser de la siguiente forma:

(i) *si AC es la diagonal del rectángulo ABCD, entonces $a(\Delta ADC) = a(\Delta CBA)$.*

(ii) $a(\Delta ADC) = a(\Delta AEU) + a(\Delta UFC) + a(\square UFCG)$,

$$(iii) a(\Delta CBA) = a(\Delta UHA) + a(\Delta CGU) + a(\square UGBH)$$

$$(iv) a(\Delta AEU) = a(\Delta UHA), \text{ porque } AU \text{ es diagonal del rectángulo } AEUH$$

$$(v) a(\Delta UFC) = a(\Delta CGU), \text{ porque } UC \text{ es diagonal del rectángulo } UFCG$$

$$(vi) \text{ de (ii) y (iii) } a(\Delta AEU) + a(\Delta UFC) + a(\square UFCG) = a(\Delta UHA) + a(\Delta CGU) + a(\square UGBH)$$

$$(vii) \text{ de (i) y (v) } a(\square UFCG) = a(\square UGBH)$$

El discurso teórico no es una manera natural de razonar pues está muy lejos de las formas de razonamiento usadas en la vida diaria. Relacionar las proposiciones de acuerdo con su estatus va en contrar de las asociaciones evidentes o espontáneas. Axiomas, teoremas y definiciones no son argumentos que sustenten una tesis o una opinión sino eslabones de una cadena articulados estratégicamente para llevar de la hipótesis a la tesis. Para usar un teorema se requiere que éste se ajuste a las proposiciones ya articuladas y haga el empate con las afirmaciones que se tiene previsto vengan a continuación. Muchos alumnos no distinguen este proceso teórico deductivo, de un proceso discursivo más natural, incluso cuando mencionan, aparentemente de manera correcta, definiciones y teoremas. Les parece una exigencia artificial e inútil del profesor. Pero aquellos que descubren el proceso deductivo, especialmente en los niveles locales de organización de las proposiciones, obtienen una experiencia personal de la necesidad lógica de la conclusión y del poder de esta forma de razonamiento. Perciben la naturaleza y el grado de fuerza de la convicción lograda acerca de la certeza de un enunciado por esta vía.

Podemos concluir que existe una brecha entre la argumentación informal y la justificación formal

en un discursivo teórico. Uno de los principales problemas de la enseñanza de la geometría es la dificultad para hacer que muchos alumnos superen esta brecha. A veces, los profesores no tienen conciencia clara de la dificultad y no se hacen esfuerzos por superarla. Este proceso no puede pretender partir de un marco de definiciones ya construidas, pues de esa manera se pierde el sentido de necesidad de la precisión, y del acuerdo social necesariamente arbitrario asociado con las convenciones empleadas, y se reduce el razonamiento a un simple cálculo proposicional sin ningún sentido para el alumno. Por el contrario, ese proceso de transformación del discurso debe insertarse en un esfuerzo de interpretación y explicación de fenómenos teórico-perceptivos como lo son las construcciones geométricas, a las que nos referiremos en el siguiente apartado.

3.3. La construcción geométrica como encadenamiento “natural” de los procesos de visualización y los procesos de justificación.

Para muchos investigadores (Moreno, 2002; Laborde, 2000) las profundas diferencias entre las dimensiones de la geometría como ciencia del espacio y la forma, en la cual lo que vemos en una figura puede ser tomado como garantía de certeza, y la geometría deductiva, en la cual cualquier afirmación debe ser deducida de otras dadas, es motivo de constantes reflexiones ya que refleja las tensiones entre los procesos de visualización y los procesos de justificación. Ciertamente hay un profundo cambio de estatus de los objetos cuando nos movemos de la geometría de la evidencia visual a la geometría de los objetos y relaciones involucrados en un sistema deductivo. Pero la existencia de este salto conceptual no implica que el conocimiento anterior de los estudiantes no sea útil cuando se

enfrentan a la tarea de probar como tampoco que esto implique que los procesos de resolución de una prueba sean puramente deductivos.

Podemos entonces identificar dos extremos de un continuo que va desde la posición totalmente perceptual, donde no interviene el razonamiento, hasta la posición totalmente formal, donde se ha eliminado todo referente perceptual para establecer un discurso teórico deductivo. En el amplio espectro entre estos dos extremos encontramos el espacio de exploración y de creatividad que ha ido constituyendo el trabajo en geometría escolar.

Como parte de ese esfuerzo de superar las limitaciones de la percepción, surgió la construcción geométrica. Podemos describirla como un dibujo técnico, en el que la utilización apropiada de ciertos instrumentos asegura la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. La construcción geométrica tiene dos aspiraciones básicas: asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductibilidad del dibujo, tomando en cuenta (únicamente) las propiedades fundamentales del mismo por medio de la utilización de instrumentos técnicos como el compás y la regla. Una construcción geométrica se diferencia entonces de un simple dibujo, legitimando de cierta manera las conclusiones que pueden sacarse de ella, pues las propiedades presentes no son resultado del azar, sino que fueron construidas de manera explícita, o son un resultado necesario de esa construcción.

Más allá de la concreción de las construcciones realizadas sobre el papel, o en la pantalla de un computador, tales construcciones desbordan el marco de lo concreto e

invaden terrenos teóricos. Es decir, las herramientas para producir los dibujos y sus reglas de uso corresponden a axiomas y teoremas de un mismo sistema teórico que no siempre está explícito. Dada una construcción, siempre es posible hallar un teorema que la valide y establece la “legalidad” de las relaciones entre los elementos de la figura. Adicionalmente, las construcciones añaden elementos conceptuales que ayudan a los estudiantes a reconocer y conectar las diferentes propiedades matemáticas necesarias para obtener, por ejemplo, una figura correcta, y posteriormente justificar por qué está correcta.

Allí reside la importancia de la construcción como motor del pensamiento deductivo, pues las propiedades explícitamente construidas se convierten en premisas, siendo las conclusiones otras propiedades verificadas en la construcción, pero que de alguna manera son “espontáneas”. En palabras de Villiers (1999), el alumno puede descubrir en la construcción propiedades que él no puso allí, lo cual le permite descubrir que hay alguna relación de implicación entre las propiedades que él puso, y las que descubrió después.

Por supuesto, una construcción geométrica sigue siendo una representación limitada de un objeto matemático, limitada por el nivel de precisión de los instrumentos técnicos y por el nivel de pericia de quien efectúa el dibujo. La dificultad de la utilización de la construcción como campo de reflexión, radica en la dificultad motriz que conlleva a la utilización idónea de los instrumentos técnicos. El desarrollo de la habilidad necesaria consume mucho tiempo, mientras que el estatuto de dibujo no la justifica como habilidad matemática. Desde este punto de vista, los programas de computador pueden tomar a su cargo la precisión de los trazados, liberando la atención de los alumnos para concentrarla en la reflexión teórica sobre los mismos.

La construcción puede constituirse en campo de exploración y reflexión, de donde la deducción puede nacer y organizarse. Pone en evidencia propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la argumentación. Esta, entendida como mecanismo para validar afirmaciones dentro de un contexto, a partir de la formulación de inferencias de carácter deductivo, da pie a la demostración, con lo cual las proposiciones geométricas cobran importancia por el papel que desempeñan en el sistema axiomático deductivo.

En síntesis, en este capítulo hemos desarrollado las siguientes ideas:

- Los procesos de visualización están determinados por características fisiológicas que favorecen la percepción de ciertos aspectos y dificultan otros. De esta manera pueden resultar un obstáculo para el razonamiento en geometría, impidiendo la identificación de relaciones o componentes claves para la comprensión del problema, o resultar un apoyo fundamental en dicho razonamiento.
- Los procesos de visualización pueden constituirse, en sí mismos, en una forma de razonamiento tanto o más poderosa que la justificación y no asimilable con ésta.
- Los procesos de argumentación pueden influir nuestra percepción visual, permitiendo superar los obstáculos debidos al funcionamiento fisiológico.
- La justificación puede tomar dos formas: la argumentación informal y la argumentación formal generalmente de carácter deductivo.
- El trabajo complementario entre los procesos de visualización y los procesos de justificación puede favorecer una organización deductiva, pues se evidencian las relaciones de equivalencia o de inferencia entre distintos enunciados (por ejemplo: si un cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos, entonces sus diagonales se bisecan).
- Al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

4.1 ¿Qué es un software de Geometría Dinámica?

A primera vista, un programa de geometría dinámica es un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador. Pero en realidad es más que un simple editor en el que el usuario puede agarrar con el ratón un elemento del diagrama y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella. Así, la naturaleza de las figuras que se hacen en un entorno de geometría dinámica es diferente a la de los dibujos que hacemos con papel y lápiz.

Existen diversos programas de Geometría Dinámica, con diferencias sustanciales de funcionamiento, calidad gráfica, precisión matemática y costos. Entre estos programas están *Cabri Géomètre*, *Geometre Sketch Pad*, *Regla y Compás* y *Cinderella*. Para las actividades del proyecto utilizamos el programa *Cabri Géomètre*, integrado en la calculadora TI 92, y en adelante cada vez que nombramos la Geometría Dinámica nos referiremos a dicho programa, sin excluir la posibilidad de que otros programas tengan las mismas posibilidades.

La construcción de una figura en *Cabri Géomètre*, por ejemplo, se hace mediante la utilización de herramientas para crear elementos

geométricos básicos como puntos, rectas o circunferencias y otras construcciones que se realizan sobre estas, como rectas perpendiculares, bisectrices, simetrías, entre otros.

4.2 Características fundamentales de software de Geometría Dinámica

Las principales características del medio geométrico dinámico son las siguientes:

a. La capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación. La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla.

Con esta opción, es posible reconocer los invariantes de una construcción, según si el arrastre conserva las propiedades matemáticas de dicha construcción o no. Tomemos como ejemplo la construcción de un cuadrado. Si planteamos esta tarea a los alumnos en el entorno de papel y lápiz, existen dos comportamientos diferentes que desembocan en un dibujo perceptivamente correcto:

- El alumno puede utilizar su idea prototípica de cuadrado y reproducir una forma que imita ese prototipo.
- El alumno puede utilizar sus conocimientos sobre las propiedades de un cuadrado (ángulos rectos, segmentos congruentes) para hacer la construcción usando los instrumentos de trazo.

En clase de geometría el profesor buscaría privilegiar la segunda estrategia, pues responde a una interpretación matemática. Sin embargo, será difícil para él identificar el primer procedimiento (a menos que haya presenciado el trabajo) y convencer al alumno de la invalidez del mismo, dado que el resultado es visualmente equivalente.

Miremos ahora esta misma tarea en un entorno de geometría dinámica. Una primera opción sería señalar cuatro puntos sobre la pantalla, que puedan servir de vértices de un cuadrado y trazar los segmentos que los unen (Figura 11).

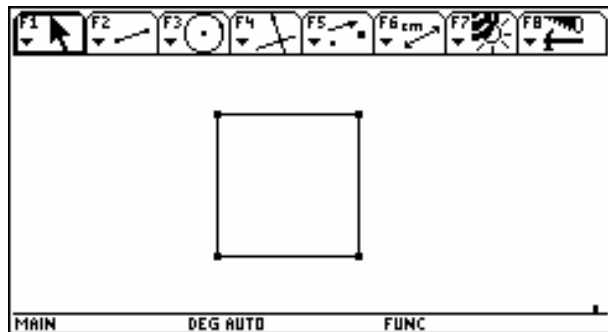


Figura 11

Pero, aunque la construcción parezca correcta, cuando sometemos esta figura a la prueba del arrastre, vemos que la propiedad “*ser cuadrado*” no se mantiene (Figura 12).

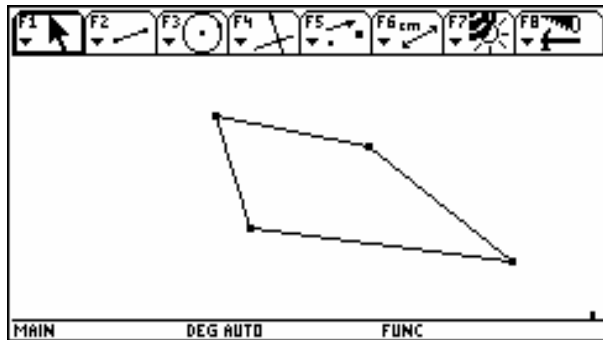
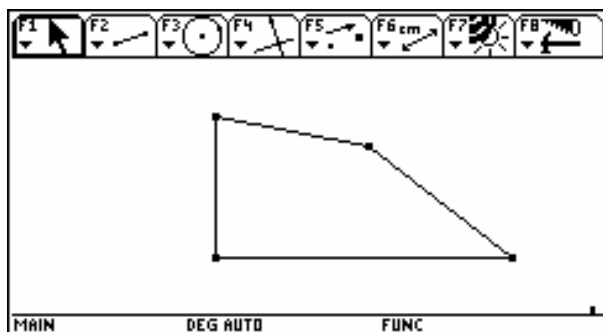
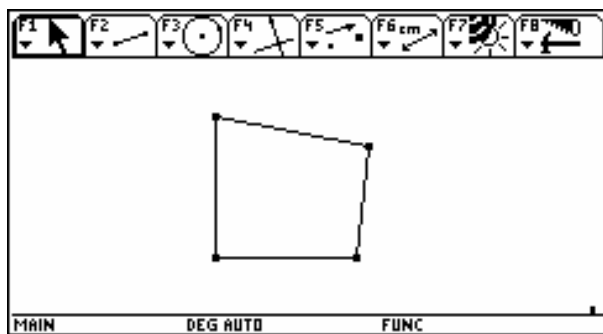


Figura 12

Si realizamos la construcción atendiendo a la perpendicularidad y congruencia de los lados y realizamos la misma operación de deformación, observamos que la propiedad de ser cuadrado se mantiene; *ser cuadrado* es una propiedad invariante (Figura 13).

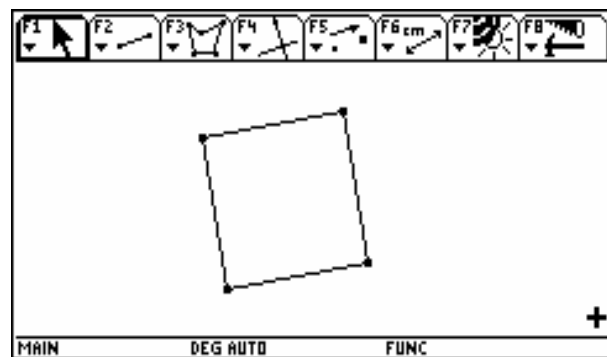
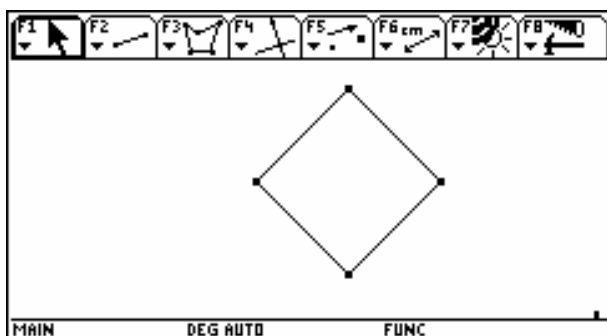
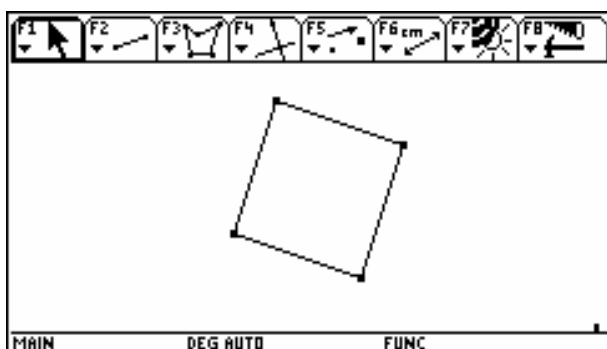
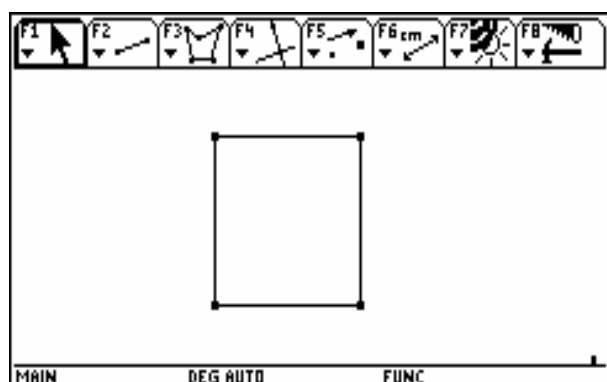


Figura 13

Esta constatación tiene un gran potencial didáctico pues permite que la exploración de los estudiantes se circunscriba a las propiedades que definen y caracterizan los (nuevos) objetos matemáticos.

Así, la capacidad de arrastre de los objetos de una construcción favorece la búsqueda de propiedades de la figura, que permanecen “vivas” durante la deformación a la que sometemos la figura original. Estas son las propiedades geométricas *genuinas*. El *objeto geométrico* queda definido entonces por dichas propiedades. Hay una ganancia didáctica inmediata: quien explora en un ambiente dinámico, tiene a mano un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariantes. Ellos pueden conducir a consolidar un conocimiento matemático en construcción.

Decimos entonces que la geometría dinámica, instalada en un ambiente computacional, se coloca a medio camino entre el mundo sensible (perceptible por los sentidos), en este caso esencialmente visual, y el mundo matemático (o esencialmente abstracto). Es decir, al mismo tiempo que traduce de manera visual un universo teórico, gracias a la manipulación de objetos virtuales en la pantalla, responde a ese conocimiento teórico organizado en una estructura axiomático deductiva.

b. El uso extensivo de locus (lugar geométrico) y trace (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.

Supongamos que queremos saber cuál es la huella que deja un punto sobre una circunferencia (en la figura 14 el punto X) cuando ésta rueda sobre una recta.

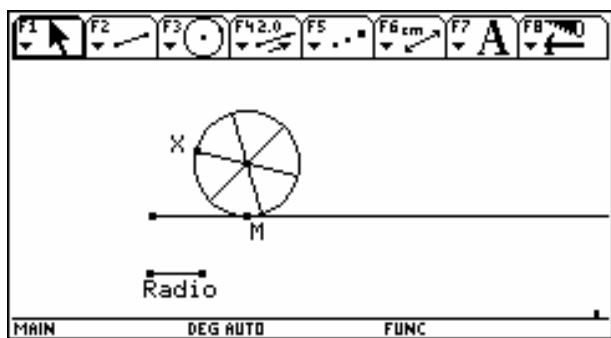


Figura 14

Al ponerle tinta o generar la traza del punto X y mover el punto M sobre la recta, se genera el lugar geométrico conocido como cicloide (Figura 15).

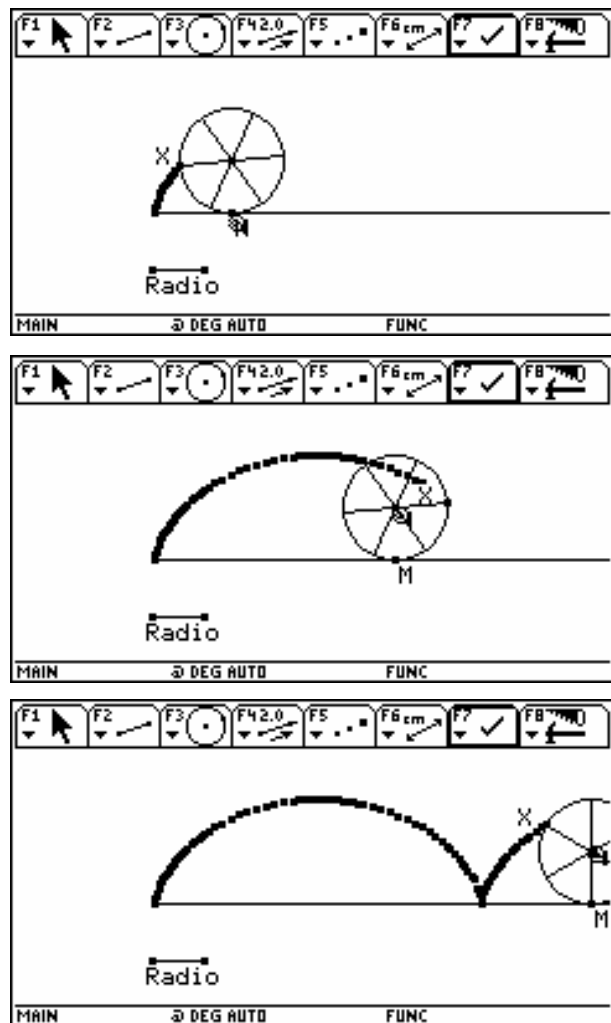


Figura 15

Así, no tenemos que imaginarnos la huella. El programa nos permite visualizar el comportamiento del punto y “descubrir” a partir de la visualización, regularidades geométricas de el movimiento.

c. La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

Dibujemos un punto F libre. Construyamos un segmento, un punto M sobre él, una perpendicular al segmento por el punto M y la mediatriz del segmento FM.

Al animar el punto M moviéndose sobre el segmento se presenciar el proceso constructivo de una parábola (Figura 16)

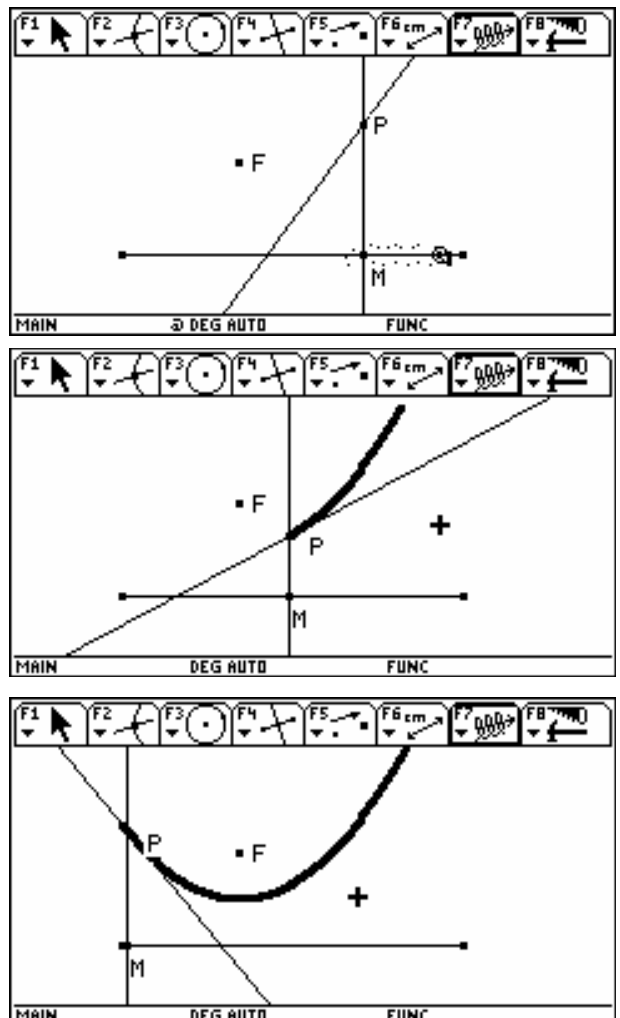


Figura 16. Proceso constructivo de un hecho geométrico

Es claro que estas características (entre muchas otras) incorporadas al medio dinámico CABRI GÉOMÈTRE, nos van a permitir una *exploración geométrica* mucho más a fondo que la posible con la regla y el compás clásicos. Bajo las deformaciones convenientes que se hagan, usando el movimiento en nuestro plano geométrico, podremos apreciar propiedades invariantes difíciles de apreciar con otros medios.

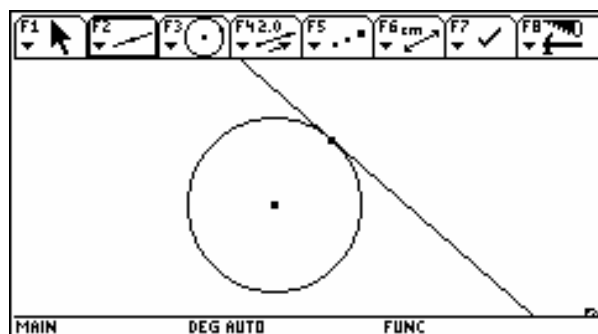


Figura 17

4.3 Principios fundamentales para trabajar con Geometría Dinámica

La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla. Decimos entonces que en la base de cualquier uso de la geometría dinámica deben estar dos principios fundamentales: *dudar de lo que se ve, y ver más de lo que se ve*.

- **Dudar de lo que se ve** significa no tomar por verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre.

- **Ver más de lo que se ve** significa estudiar una figura para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista. Esto es posible enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación.

A continuación ejemplificaremos estos dos principios.

En la pantalla de una calculadora podemos observar la figura 17.

Si nos limitamos a consideraciones visuales, exclusivamente, diremos que la recta es tangente a la figura (*parece* que sólo la toca en un punto). Pero, ¿acaso ese hecho visual es un hecho geométrico? Debemos comprobar que lo que vemos en la pantalla es una relación entre la circunferencia y la recta, que no se destruye al modificar mediante el arrastre la circunferencia o la recta. Podemos modificar la posición de la circunferencia arrastrándola por su centro. Al hacerlo, si observamos que la recta se *despega* de la circunferencia, comprobamos que la situación ilustrada en el dibujo anterior era sólo aparente (Figura 18): no se había llegado a ella como resultado de una construcción geométrica, sino tan sólo acercando entre sí los dos objetos geométricos considerados. Este ejemplo ilustra el principio de *dudar de lo que se ve*.

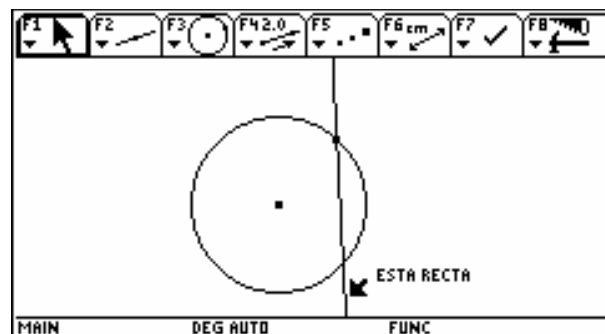


Figura 18

Para aplicar el segundo principio, *ver mas de lo que se ve*, podemos buscar una construcción,

a partir de relaciones, que resista el arrastre. Si se construye una circunferencia, un punto sobre ella y una recta que pase por ese punto, puede moverse la recta de manera que parezca tangente, o de manera que se evidencia que es secante. Si trazamos el radio correspondiente al punto sobre la circunferencia, podemos intentar *ver mas*, para encontrar una relación geométrica que se cumple cuando la recta es tangente. Al considerar el radio, puede verse que al acercarse a la posición de tangencia, la recta parece perpendicular a él (Figura 19).

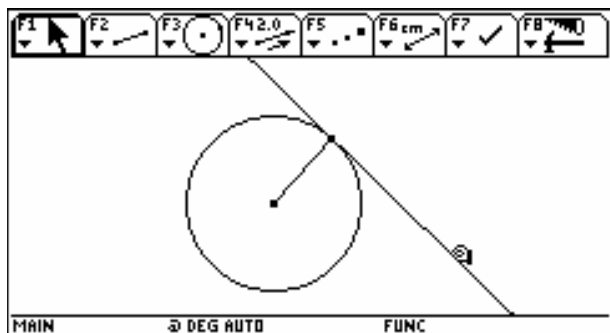
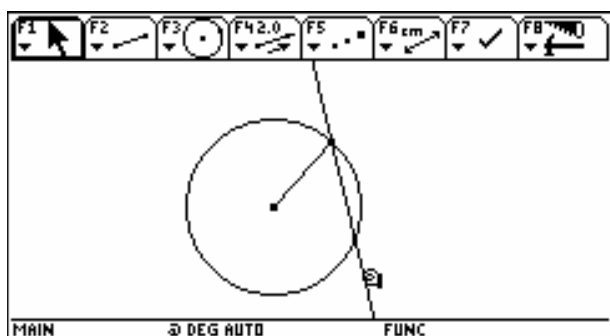


Figura 19

Podemos entonces utilizar esa relación para construir la tangente: construimos la recta perpendicular al radio que pasa por el punto sobre la circunferencia, y desplazamos de nuevo el punto para ver si la relación de tangencia se mantiene o se destruye con el arrastre (Figura 20).

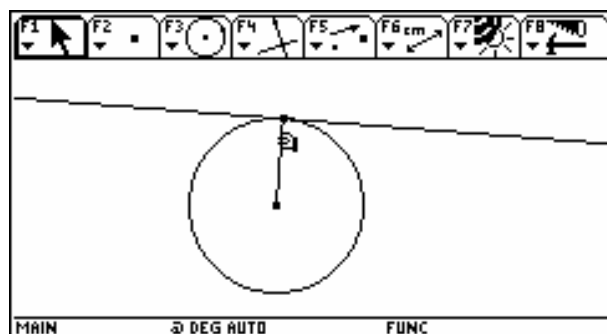
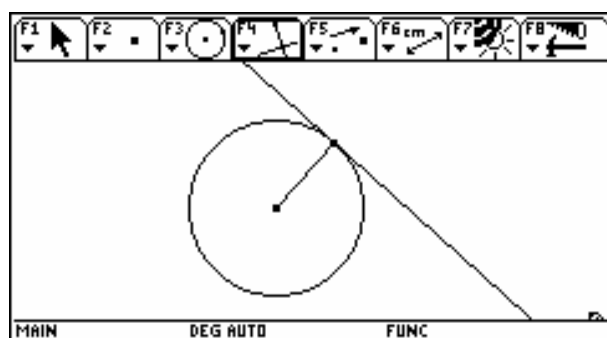


Figura 20

Estos dos principios recogen, de manera implícita, el trabajo fundamental en geometría escolar: el cuestionamiento de los datos recibidos de la percepción, y la intervención del razonamiento como herramienta para superar las ambigüedades y obstáculos de la misma.

Ahora veamos cómo estas características de un software de geometría dinámica como Cabri facilitan y potencian el aprendizaje de la geometría.

4.4 Aspectos específicos del potencial de la geometría dinámica para el desarrollo del pensamiento geométrico

A continuación profundizaremos en algunos aspectos centrales del potencial de la geometría dinámica. Ilustraremos de qué manera se favorece la articulación entre los procesos de

visualización y de producción de enunciados geométricos, daremos argumentos relativos a la importancia de las construcciones geométricas dinámicas para generar comprensión geométrica, mostraremos cómo contribuye a generar una dinámica de exploración, sistematización y validación de enunciados geométricos y daremos algunas ideas para ilustrar el potencial en la modelación y simulación de fenómenos de otros campos científicos y otras áreas de las matemáticas.

4.4.1 Articulación entre procesos de visualización y procesos de justificación.

Como lo resaltamos en el capítulo anterior, el aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Mas aún, para lograr un aprendizaje significativo, es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido, y a su vez las habilidades visuales sean guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia.

Los aspectos de percepción visual y justificación, en geometría, mantienen relaciones complejas de complementariedad y oposición a la vez. Este hecho conduce a que en ocasiones una pueda ser obstáculo para la otra o, por el contrario, pueda ser un apoyo indiscutible. Al hacer una reconstrucción histórica de las actividades humanas relacionadas con la geometría se puede apreciar que los problemas ligados a la percepción visual y su articulación con el discurso matemático preocuparon durante muchos siglos a los matemáticos, que buscaron insistentemente, bajo el paradigma griego, encontrar un fundamento exclusivamente racional a la geometría, prescindiendo así de la percepción visual. Este trabajo enfrentó muchos fracasos a lo largo

de la historia, debido a la estrecha relación entre la percepción y el razonamiento, aunque finalmente Hilbert logró formular la estructura axiomática de la geometría independientemente de toda percepción.

Una alternativa razonable consiste en comprender las relaciones y mutuas influencias entre los procesos de visualización y los procesos de organización discursiva de hechos geométricos para estrechar sus lazos, de manera que puedan superarse los obstáculos que representan tales relaciones y se logre un aprendizaje significativo. El trabajo complementario entre los procesos de visualización y la elaboración de discursos puede favorecer el pensamiento deductivo, pues se evidencian las relaciones de equivalencia o de inferencia entre distintos enunciados y así la deducción adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación. Es allí donde el trabajo en geometría dinámica cobra gran significado.

La visualización ha sido un tema estudiado intensamente por la didáctica desde el arribo de la tecnología informática, con capacidades de graficación, a los sistemas educativos. Cuando se explora un problema escrito en el lenguaje verbal, o modelado a través de expresiones simbólicas, relacionando dichas formas de representación con los fenómenos visuales que aparecen en la pantalla de un computador, se abren nuevas oportunidades para el aprendizaje al ampliar las experiencias posibles de los estudiantes.

Sin embargo, no cualquier implementación de la geometría dinámica en la enseñanza conduce automáticamente a la articulación entre la visualización y la justificación. Por ejemplo, cuando se emplea el software para ilustrar visualmente las relaciones expresadas por las proposiciones geométricas, se consigue una economía en el

tratamiento de la proposición, reduciendo su estudio a una observación visual global de ésta, lo cual genera un efecto contraproducente en la enseñanza: la geometría de la constatación de hechos. Este tipo de ostensión reduce la actividad del alumnos a comprobar una serie de hechos, sin desarrollar un verdadera indagación sobre los mismos. En un esquema de trabajo como este, el profesor propone una figura con la cual los alumnos trabajan para “descubrir” una propiedad. El alumnos sigue las instrucciones dadas por el profesor (tomar medidas, hacer construcciones, etc) hasta lograr “ver” la relación buscada, que luego es enunciada por el docente.

Por el contrario, el potencial didáctico de la geometría dinámica va más allá de su poder ilustrativo. Se trata de problematizar la visualización, hacerla operativa, de manera que surja de manera natural la necesidad de explorar, conjeturar, predecir, verificar. La elaboración de proposiciones geométricas adquiere sentido para los alumnos al responder a esa necesidad explicativa de los fenómenos observados. Pero, ¿cómo problematizar la evidencia visual dado que precisamente por su carácter de evidencia se resiste al análisis? La geometría dinámica nos pone a disposición de un medio idóneo para esta problematización: el arrastre. Dado que sólo las relaciones geométricas se mantienen en el movimiento, mientras que las características meramente perceptuales se destruyen, se introduce un criterio de validez que responde a la vez a la necesidad de construir enunciados y a la evidencia visual.

En un entorno computacional, una vez elaborada una figura geométrica, ciertos objetos pueden ser manipulados directamente en la pantalla mediante el arrastre y otros no, según las relaciones estructurales que se generan al construir la figura. Esto ocurre sin alterar las relaciones geométricas entre las partes constitutivas. Por

ejemplo, en la figura 21 se puede apreciar una circunferencia y una recta que aparentemente es tangente a ella. Sólo hasta superar la pruebas del arrastre podemos afirmar que realmente existe un punto en común entre estos dos objetos geométricos.

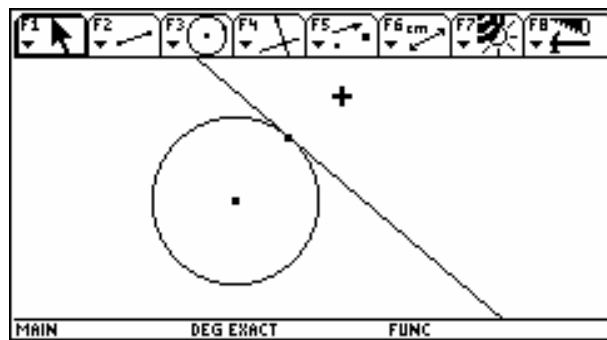


Fig. 21

Si lo que tenemos ahora es una recta “realmente” secante a la circunferencia en los puntos A y B (figura 22) podemos arrastrar el punto A hasta hacerlo coincidir con B. Durante el proceso, la relación geométrica entre la recta t y los puntos A y B no se altera: t está determinada por los puntos A y B. Podemos visualizar entonces que la aproximación de A hacia B transformará a dicha recta en una tangente a la circunferencia, pero las relaciones entre los puntos A y B y la circunferencia no se alteran. El movimiento efectuado nos permite “ver” una recta tangente como el caso extremo de una secante en el límite propiciado por el acercamiento.

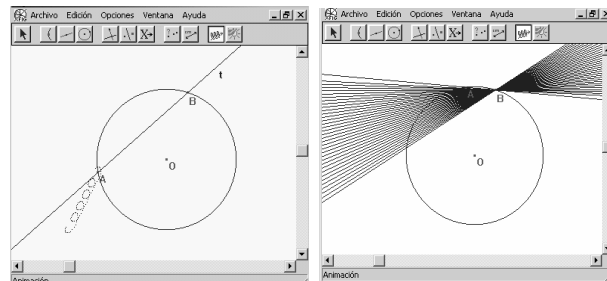


Fig. 22

Los dibujos dinámicos ofrecen fenómenos visuales mas fuertes que los dibujos estáticos. Una propiedad espacial puede surgir como invariante en el movimiento, lo cual puede ser imposible de percibir en un dibujo estático. En este caso, puede pasar desapercibido por ejemplo, que una recta siempre pasa por un punto dado. Asumimos que en este tipo de tareas el entorno de software da más importancia a la observación visual y por lo tanto puede obligar a los alumnos a explicar por qué obtienen tal o cual fenómeno visual.

Actividad para el aula

Para ejemplificar las ideas anteriormente expuestas se puede realizar la siguiente actividad, propuesta por Duval.

Estudie la relación entre las áreas de los rectángulos ABCE y AGHI de la figura 23, cuando el punto A se desplaza a través de la diagonal del rectángulo.

Al mover el punto A se observan invariantes fundamentales para identificar visualmente la relación solicitada.

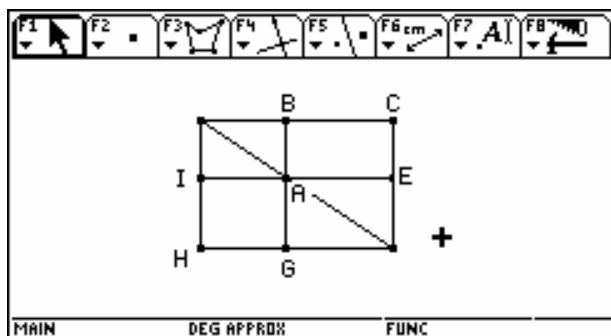


Fig. 23

4.4.2. Diferenciación entre dibujo y objeto geométrico

Al estrechar los lazos entre la visualización y la justificación, los programas de geometría dinámica contribuyen a crear un puente entre el dibujo (producido utilizando únicamente ajustes perceptivos) y el objeto geométrico que dicho dibujo representa (producido con base en relaciones geométricas). La dificultad para hacer esta distinción ha sido explorada como una de las fuentes de inhibición del desarrollo del pensamiento geométrico. Por ejemplo, al proponer a los alumnos la exploración de las relaciones entre un ángulo exterior de un triángulo y cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes, el profesor – con inusitada frecuencia – se apoya en un dibujo como el de la figura 24.

Se trata de probar que $\beta < \alpha$. Después de quedar perplejo al escuchar a su profesor, el estudiante se pregunta: ¿no es obvio que β es menor que α , dado que β es un ángulo agudo y α uno obtuso? El estudiante no capta la generalidad del argumento del profesor y el profesor no siempre es consciente del “ruido” que ese dibujo introduce a su argumento.

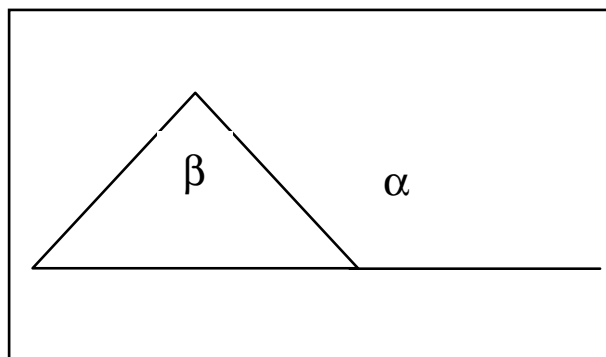


Fig. 24

Si en lugar de ello se presenta la construcción de la figura 24A y se sugiere al alumno mover el vértice B podremos comprobar que lo que vemos en la pantalla es una relación geométrica, que no se destruye al modificar mediante el arrastre, la forma del triángulo.

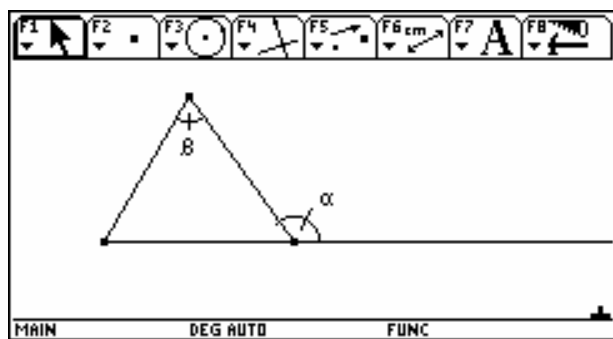


Fig. 24A

Esta exploración, que podemos implementar en el medio geométrico propio de Cabri, contiene el criterio fundamental para distinguir entre “dibujo” y “objeto geométrico” sobre el cual consideramos necesario insistir: *un hecho geométrico es tal, cuando es capaz de pasar el test del arrastre.*

En síntesis, en un entorno de geometría dinámica los objetos visibles en la pantalla no son representantes individuales, instanciaciones únicas de conceptos generales (como en el caso de un dibujo en el papel), sino que guardan en sí mismos esa generalidad, gracias al arrastre que permite con un solo trazado obtener una multiplicidad de imágenes según la diversidad de posiciones que pueden ocupar en la pantalla. Por ejemplo, un triángulo no es *un caso posible de triángulo*, sino que al desplazar sus vértices en la pantalla abarca en un solo objeto, *todos los casos posibles de triángulos que pueden dibujarse*. De esta manera, la invariabilidad de las relaciones se vuelve perceptible, pues es algo

que se conserva con el arrastre. Así, las características de una figura geométrica no son simples resultados de una disposición perceptiva de una forma prototípica, sino que son verdaderos invariantes.

Actividades para el aula:

En Cabri se pueden presentar figuras como las siguientes para verificar si las características geométricas que se enuncian son verdaderas o falsas.

- Determinar si la recta l es paralela a la recta m (figura 25).
- Estudiar si las rectas p y q son perpendiculares (figura 26).
- Evaluar si las dos circunferencias son tangentes entre sí (figura 27).
- Analizar si los dos cuadriláteros son simétricos (figura 28).
- Determinar si el triángulo ABC es equilátero (figura 29).
- Analizar si el hexágono $ABCDEF$ es regular (figura 30).

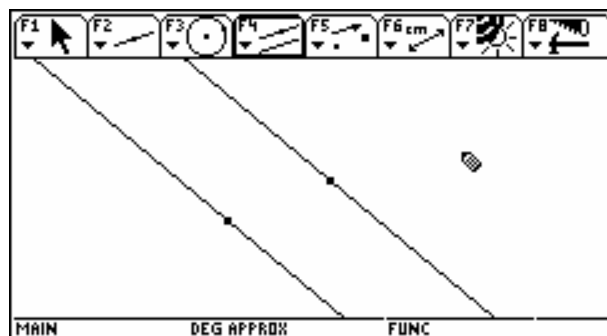


Fig.25

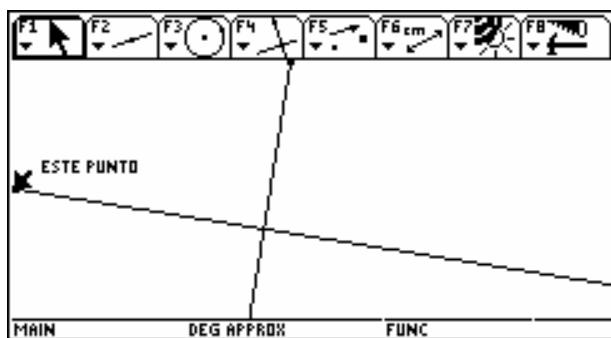


Fig.26

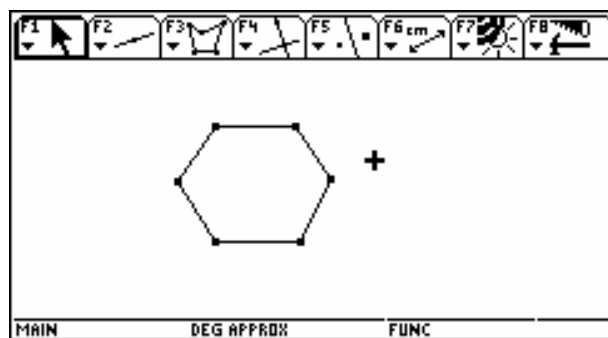


Fig.30

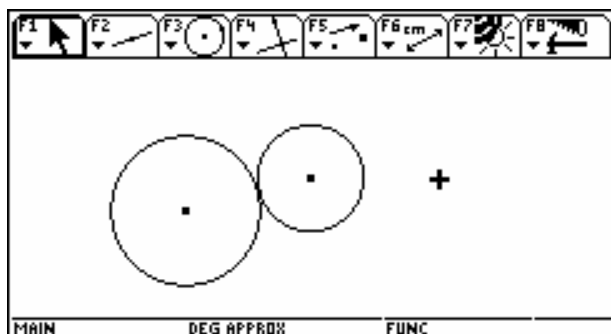


Fig.27

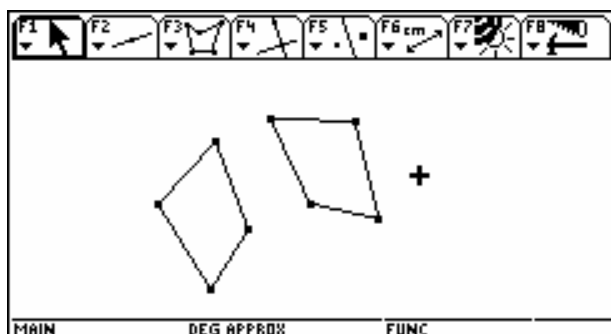


Fig. 28

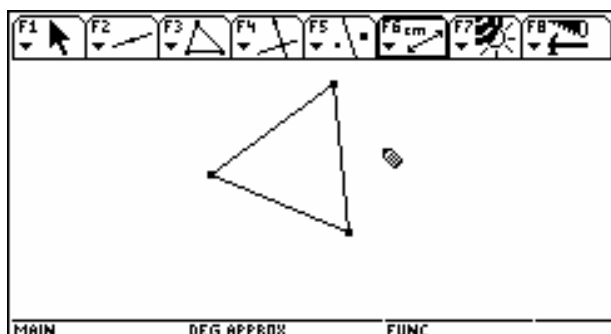


Fig 29

4.4.3 La problematización de las construcciones geométricas

El papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de “*experimentación*” sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, como es, la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación y su potencial pedagógico para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.

Para aprovechar ese potencial, no basta con proponer a los alumnos una construcción. Es necesario que la tarea de construcción sea un problema en cuya solución pongan en juego sus conocimientos previos y las posibilidades del software.

Producir un dibujo en *Cabri Géomètre* que preserve propiedades espaciales durante el arrastre, requiere el uso de propiedades geométricas para su construcción, y descalifica los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. Un proceso de construcción en *Cabri Géomètre* “*a ojo*” deja de satisfacer las condiciones cuando se mueve

uno de los objetos de base. La tarea requiere el uso de relaciones geométricas y no sólo una percepción visual de estas, como en el entorno de papel y lápiz.

Por ejemplo, en un ejercicio propuesto por Laborde y Capponi (2000) en el que se pidió a alumnos de grado octavo que construyeran una recta paralela a otra recta dada (d) y que pasara por un punto dado P usando únicamente *bisectriz*, *simetría axial* o *simetría central* se detectó la siguiente secuencia de estrategias:

- Inicialmente, los estudiantes emplearon estrategias puramente visuales que fueron descalificadas por ellos mismos casi de inmediato por no pasar la prueba del “arrastre”.
- Luego, hicieron uso de la simetría central en forma espontánea tomando los puntos simétricos de P por dos puntos tomados como centro, sobre la recta d .

Al usar las herramientas geométricas, sin una intención definida, los alumnos produjeron una paralela pero que no pasaba por P . Observaron que esa recta siempre era paralela a d incluso si arrastraban P (figura 31).

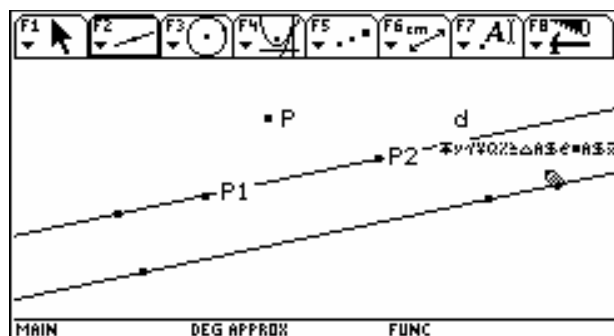


fig.31

- Finalmente realizaron una composición de simetría axial y simetría central (figura 32). Hallaron el punto $P1$ simétrico de P respecto de la recta d y luego el simétrico de $P1$ respecto a un punto A , cualquiera sobre

la recta d . Lo novedoso en esta respuesta es el uso de una secuencia de transformaciones para obtener la propiedad solicitada.

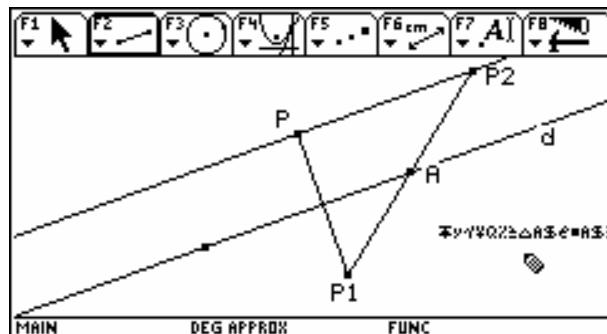


Fig. 32

El hecho de que la simetría axial pueda ser utilizada para obtener una recta perpendicular a una dirección es una aplicación interesante no usual en el entorno de papel y lápiz. Incluso, algunos alumnos pueden sorprenderse al observar que la recta que une un punto y su imagen por una simetría axial es perpendicular al eje de simetría. Igualmente, el hecho de usar una composición de una simetría axial y una simetría central también es novedoso; generalmente estas composiciones se usan en las demostraciones de teoremas pero no como herramientas de construcción para producir una figura geométrica.

Lo que reafirma este tipo de experiencias de clase es que las opciones que brinda el software juegan un rol importante en el transcurso de una estrategia a la otra: el modo arrastre descalificó las estrategias puramente visuales pero también permitió que los alumnos descubrieran un invariante espacial: el paralelismo, cuando usaron las herramientas espontáneamente. Como los alumnos sabían que el fenómeno espacial que produjeron al azar era resultado del uso de herramientas primitivas geométricas, estaban seguros de poder reproducir la figura en cualquier momento. Finalmente el hecho de que el software “sabe geometría” detonó la búsqueda

de una solución geométrica. Sólo en ese momento *se enfrentaron realmente a una tarea geométrica: ¿cómo reproducir ese invariante espacial con la condición adicional de que la línea pasara por P?* Para lograrlo, tuvieron que analizar el procedimiento llevado a cabo espontáneamente, análisis que los condujo a comprender por qué este procedimiento produce una recta paralela.

El ejemplo anterior muestra que la posibilidad de hacer construcciones en el computador o en la calculadora ofrece la oportunidad de vincular procesos discursivos que hacen parte del dominio teórico de la matemática con procesos visuales, no sólo de manera pasiva (como en una película), sino de manera operativa (la construcción se usa como herramienta de solución de un problema).

Actividades para el aula

- Dibuje un segmento AB . Construya un segmento congruente con \overline{AB} e identifique qué propiedades geométricas se conservan al efectuar movimientos de los objetos de la construcción.
- Construya un segmento y divídalo en tres partes iguales.
- Construya dos triángulos congruentes que soporten la congruencia ante cualquier movimiento de los objetos de la construcción.
- Dado un segmento AB y un punto M construya un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.
- Dados tres segmentos \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{EF} , construya un triángulo de forma que \overline{AB} y \overline{CD} sean dos lados y \overline{EF} sea la mediana sobre el lado \overline{AB} .
- Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{PQ} , construya un triángulo rectángulo de forma que \overline{PQ} sea la hipotenusa y \overline{AB} un cateto.
- Dado un segmento \overline{AB} , construya el triángulo equilátero cuya altura sea \overline{AB} .
- Dados tres segmentos \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{PQ} , construya un triángulo de forma que \overline{AB} y \overline{CD} sean dos lados y \overline{PQ} sea la altura sobre el lado \overline{AB} .
- Dados tres segmentos \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{PQ} , construya un triángulo de forma que \overline{AB} y \overline{CD} sean dos lados y \overline{PQ} sea la altura sobre el tercer lado \overline{CD} .
- Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} , construya un triángulo isósceles de forma que \overline{AB} sea la base del triángulo y \overline{CD} sea su perímetro.
- Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} y un ángulo α , construya un triángulo de forma que \overline{AB} y \overline{AB} sean dos lados y α sea el ángulo formado por ellos.
- Dadas dos rectas secantes a y b y un punto libre P , construya un triángulo equilátero con vértices en P , a y b .
- Dado un triángulo ABC y un punto D sobre uno de sus lados, construya un triángulo equilátero con vértices en D , y los otros dos lados.
- Dado un segmento AB y dos rectas AD y BE construya un punto C tal que las rectas AD y BE sean bisectrices del triángulo ABC .
- Dado un triángulo ABC , (i) construya un triángulo semejante a ABC cuyo perímetro sea la mitad del de ABC ; (ii) construya un triángulo cuyo perímetro sea la mitad de ABC pero que no sea semejante a él.
- Dado un segmento, construya un cuadrado cuya diagonal sea ese segmento.
- A partir de una recta y un punto A , construya un cuadrado tal que A sea un vértice de un cuadrado y la recta contenga la diagonal del cuadrado.
- Dado un segmento, construya un rombo cuyo lado sea ese segmento.
- Dados un segmento AB y un ángulo α , construya un rombo de forma que \overline{AB} sea su lado y α sea uno de sus ángulos.
- Dado un segmento, construya un cuadrado cuyo perímetro sea ese segmento.

- Dados dos segmentos construya un rectángulo de manera que esos segmentos sean sus lados.
 - Dados dos segmentos, construya un paralelogramo de manera que esos segmentos sean sus lados.
 - Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{EF} , construya un rectángulo de forma que uno de sus lados sea \overline{AB} su diagonal sea \overline{EF} .
 - Dado un segmento, construya un trapecio isósceles cuya diagonal sea ese segmento.
 - Dados dos segmentos, construya un trapecio de manera que esos segmentos sean sus diagonales.
 - Dados cuatro segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} y \overline{GH} , construya un trapecio de forma que esos segmentos sean sus lados y que \overline{AB} y \overline{CD} sean los lados paralelos.
 - Dado un triángulo cualquiera, inscriba un cuadrado en él.
 - Dado un cuadrilátero $ABCD$ y un segmento PQ con extremos sobre dos lados adyacentes, construya un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero, donde \overline{PQ} sea uno de sus lados.
 - Dados una recta y un punto exterior a ella, construya una circunferencia tangente a la recta con centro en ese punto.
 - Dados una recta y un segmento, construya una circunferencia tangente a la recta cuyo radio tenga la misma longitud que el segmento.
 - Construya una circunferencia tangente a dos rectas paralelas.
 - Construya una tangente a una circunferencia desde un punto exterior definido de antemano.
 - Construya una circunferencia tangente a dos circunferencias con un radio definido que mide a .
 - Construya una circunferencia tangente a una recta que pase por un punto exterior dado y un punto dado en la recta.
 - Construya una circunferencia tangente a un lado de un triángulo y a la prolongación de los otros dos lados.
 - Dados tres puntos P , Q y R , construya una circunferencia que pase por los tres puntos.
 - Dados una circunferencia C , una recta r y un punto P , dibuje un segmento que tenga como punto medio a P y sus extremos en c y r .
 - Dados un punto P , una recta r y una circunferencia C , construya un triángulo equilátero con vértices en P , r y c .
 - Dado un triángulo, construya tres circunferencias tangentes entre sí de manera que sus centros sean los vértices del triángulo.
 - Dadas dos rectas, construya una circunferencia tangente a ambas rectas.
 - Construya el centro de una circunferencia.
- ♦ *Construcción de figuras en Cabri Géomètre, con trayectorias impuesta.*
- Como las figuras geométricas del entorno *Cabri Géomètre* son de naturaleza dinámica, las tareas de construcción pueden enriquecerse agregando algunas condiciones al comportamiento que deben satisfacer. Para hacerlo, se requiere el análisis de las figuras en *Cabri Géomètre* en términos de grados de libertad, lo que se constituye en una tarea diferente de las tareas de construcción tradicionales. Las condiciones de puntos fijos y móviles también puede requerir una construcción en diferente orden y por lo tanto usar propiedades geométricas diferentes. Este es el caso en la tarea del triángulo equilátero, en la que se pide comenzar, de manera muy desacostumbrada, por el centro del triángulo.

Actividades para el aula

- Construir un triángulo equilátero que rote alrededor de su centro al arrastrarlo de cualquiera de sus elementos de base.
- Construir un rectángulo tal que al arrastrar únicamente uno de sus vértices se convierta en un cuadrado.
- Construir un cuadrado que se agrande o achique, pero no se pueda rotar.

◆ *Macro construcciones y Cajas Negras en Cabri Géomètre*

Es sabido que al alterar los instrumentos disponibles en un entorno de papel y lápiz se modifican las herramientas conceptuales que se ofrecen a los alumnos, como por ejemplo las propiedades geométricas usadas para hacer construcciones. En un entorno de geometría dinámica es posible no sólo modificar las herramientas primitivas disponibles para los alumnos, mediante la posibilidad de configurar los menús, restringiendo las opciones que están a disposición de los alumnos, sino crear nuevas herramientas que a su vez producen nuevos objetos más complejos. Por ejemplo, en la tarea de verificar el Teorema de Pitágoras, es posible hacer uso de una macro – construcción cuadrado para construir cuadrados sobre cada uno de los vértices de un triángulo rectángulo y constatar la relación entre las áreas.

Una aplicación pedagógica interesante de las macros, es la producción de cajas negras, macros que producen un determinado resultado en la pantalla, que se debe analizar para descubrir y reconstruir el proceso de construcción de la macro, e identificar relaciones invariantes en la figura.

Estas tareas incluyen, tanto la interpretación de figuras construidas en el software de geometría dinámica en términos geométricos, como su reconstrucción por medio de herramientas primitivas geométricas del software. A partir de una figura previamente realizada en *Cabri Géomètre*, figura que los estudiantes no saben cómo se construyó y de la cual no tienen acceso a su reconstrucción se les pide reconstruir el mismo dibujo, es decir, hacer una construcción geométrica que se comporte de la misma manera cuando se arrastra, que la original. Las tareas de de cajas negras no pueden realizarse en un entorno de papel y lápiz porque un dibujo

no transmite información sobre las relaciones entre sus partes.

El siguiente es un ejemplo de experimento con caja negra con alumnos de grado noveno (fig. 33) La caja negra está constituida por un paralelogramo $ABCD$ y una figura central $EFGH$. Los alumnos deben ser capaces de construir una figura central similar, en otro paralelogramo, $PQRS$ de manera que tenga el mismo comportamiento al arrastrarlo.

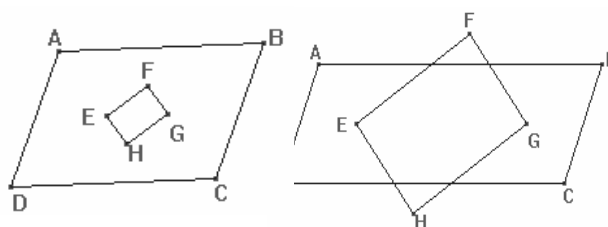


Fig. 33. Dos casos del cabri dibujo que debe reproducirse

Las cajas negras también pueden usarse para aprender sobre las transformaciones. Se dan por ejemplo, dos figuras geométricas, una imagen de la otra por una transformación desconocida; la tarea consiste en encontrar esa transformación, reconstruir la imagen de la primera figura y verificar si se obtiene la segunda.

Las situaciones de cajas negras requieren varias operaciones:

- La exploración de la figura desconocida y su comportamiento al arrastre para identificar las propiedades geométricas que permanecen invariantes, y en particular la distinción entre lo que es contingente y lo que es necesario en la apariencia visual del cabri-dibujo.
- La verificación de las propiedades geométricas que supuestamente se satisfacen utilizando otras facilidades del software. Por ejemplo, si tres puntos parecen estar alineados, los alumnos pueden trazar una

recta pasando por dos de ellos y verificar si esta recta pasa por el tercero al arrastrar.

Estas dos operaciones se basan en una interacción entre procesos de visualización y procesos de interpretación matemática para verificar por ejemplo si dos dibujos permanecen superpuestos mientras se arrastra la construcción. Por esto consideramos que este tipo de ejercicios contribuye a la construcción de relaciones entre propiedades espaciales y visuales por un lado y conocimientos geométricos por el otro.

Actividades para el aula

Macro construcción previa: dibuje dos puntos en la pantalla y construya el simétrico S de uno de los puntos con respecto al otro. Construya una recta que pase por los tres puntos y una perpendicular a ella por el punto S . Oculte la recta que pasa por los tres puntos y el punto S . (Objetos iniciales: dos puntos. Objetos finales: recta perpendicular)

Actividad: Active la macro correspondiente y reproduzca la construcción, respetando el comportamiento de los objetos de la construcción.

Macro construcción previa: construya un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y oculte el círculo y el centro. (Objeto inicial: circunferencia. Objeto final: cuadrilátero).

Actividad: Active la macro y construya un cuadrilátero que se comporte como el de la figura, al mover los vértices.

Macro construcción previa: Construya un cuadrilátero cualquiera y una recta vertical. Halle la figura simétrica del cuadrilátero, por simetría axial. Oculte el eje de simetría, el cuadrilátero simétrico y tres de sus vértices. (Objeto inicial: cuadrilátero. Objeto final: vértice del cuadrilátero simétrico).

Actividad: Active la macro correspondiente y reproduzca el cuadrilátero que se obtiene, de tal forma que se comporte como el de la figura.

Macro construcción previa: Construya dos segmentos \overline{AP} y \overline{PC} de longitudes m y n . Sobre una línea recta traslade las medidas de dichos segmentos de tal forma que el extremo P de cada uno coincidan. Construya el punto medio M del segmento \overline{AC} , la circunferencia con centro en M y radio \overline{AM} , y la perpendicular \overline{BP} a la recta, que pasa por P . Marque el punto de intersección de la recta \overline{BP} con la circunferencia con C y construya el triángulo ABC . (Objetos iniciales: segmentos \overline{AP} , \overline{PC} y recta. Objeto final: triángulo ABC).

Actividad: Active la macro correspondiente y caracterice el triángulo que se forma. Reproduzca la construcción.

Macro construcción previa: Construya un segmento \overline{AB} y un punto libre P en él. Tome el punto medio M de \overline{AB} y construya la circunferencia de radio \overline{AM} . Trace la perpendicular al segmento \overline{AB} por P . Llame C al punto de corte con la circunferencia y construya el triángulo ABC . Trace perpendiculares a los lados del triángulo por el punto medio. Tome los puntos de corte de las perpendiculares M , N y construya el cuadrilátero resultante $AMNP$. Oculte las construcciones auxiliares de manera que solo se vea el segmento y el cuadrilátero. (Objetos iniciales: segmento y punto libre sobre él. Objeto final: cuadrilátero).

Actividad: Active la macro correspondiente y reproduzca la construcción del cuadrilátero.

4.4.4. Dinámica entre la exploración y la sistematización

En geometría, un medio como *Cabri Géomètre* brinda las posibilidades de exploración acerca

de relaciones geométricas. El *software* se convierte en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos matemáticos en juego y contribuye a darles sentido. El conocimiento matemático se sitúa en el mundo *Cabri Géomètre* y en él se sientan bases sólidas para comenzar el proceso de descontextualización de las ideas geométricas para generalizarlas en invariantes que se incorporan en la red conceptual. De esta manera se da lugar a la construcción de “teoremas” con las cuales enfrentarse a la resolución de problemas.

Los recursos que un medio computacional pone a disposición de un estudiante estimulan la construcción de significados. Por eso decimos que el medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento. A partir de la experimentación, los estudiantes son capaces de articular los resultados de sus exploraciones de manera tal que estos pueden ser llevados más allá del medio computacional o pueden dar lugar posteriormente a nuevas versiones de un resultado que hacen clara la visibilidad del medio computacional. Desde esta perspectiva, se trata de conectar el conocimiento informal del estudiante con fragmentos de conocimiento matemático constituyéndose en lo que Niss y Hoyles han denominados un *dominio de abstracción*.

El entorno de geometría dinámica se convierte entonces en un campo de experimentación en el cual los alumnos pueden realizar secuencias de exploración, y al interior del cual pueden sistematizar sus acciones y sus argumentaciones para realizar procesos de abstracción situada. (esto es posible gracias a la posibilidad de enriquecimiento de una figura y la invalidación de propiedades no invariantes por el arrastre).

Por ejemplo, ante la tarea de producir un triángulo rectángulo (Lozano, 2002), un alumno de grado

octavo observó que un caso particular es la división del cuadrado por la mitad, en la que se obtienen dos triángulos rectángulos isósceles (figura 34).

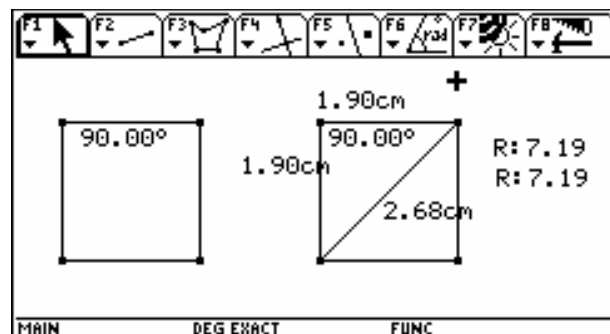


Fig. 34

Apartir de esta constatación, decidió experimentar con secciones de distintos polígonos encontrando que en los polígonos regulares con un número par de lados siempre era posible encontrar un ángulo recto si se toma como hipotenusa el diámetro de la circunferencia circunscrita por una diagonal (figura 35). Gracias a este trabajo pudo llegar a concluir que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo (figura 36).

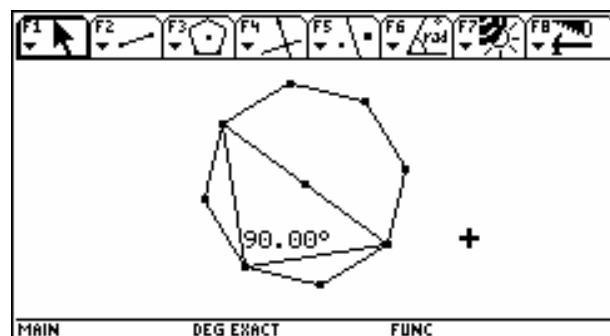


Fig. 35

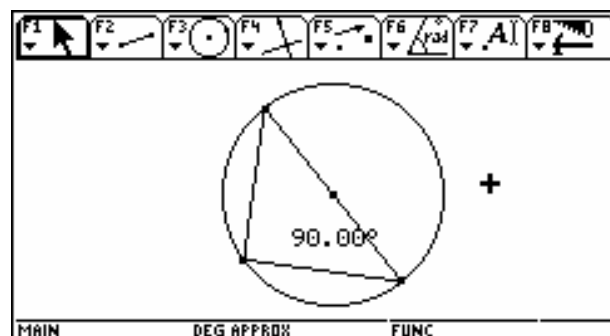


Fig. 36

En el siguiente ejercicio propuesto a estudiantes de secundaria se observa cómo el software *Cabri Géomètre* (Moreno, 2002) se convierte en un dominio de abstracción que favorece la dinámica entre la exploración y la sistematización: *se tiene un triángulo equilátero y se toma un punto cualquiera de su interior y desde allí se trazan los segmentos correspondientes a secciones de altura de los lados del triángulo. Se pide encontrar un punto, en el interior del triángulo, en donde la suma de los tres segmentos es la mayor posible.* (figura 37).

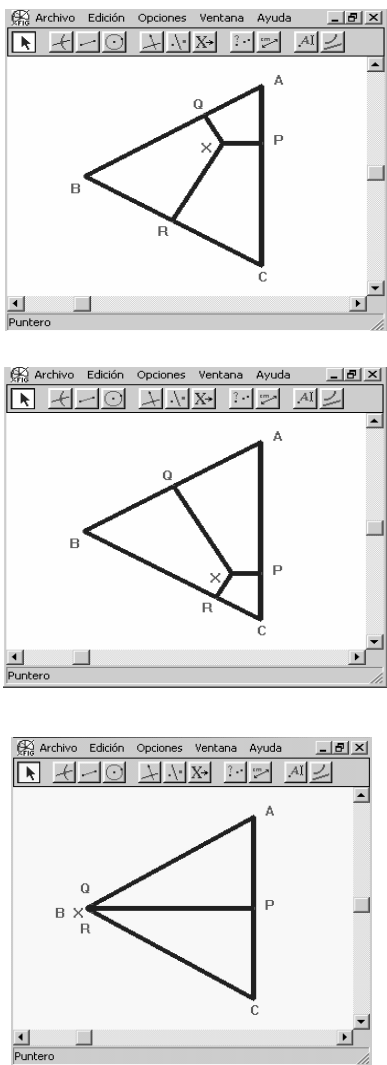
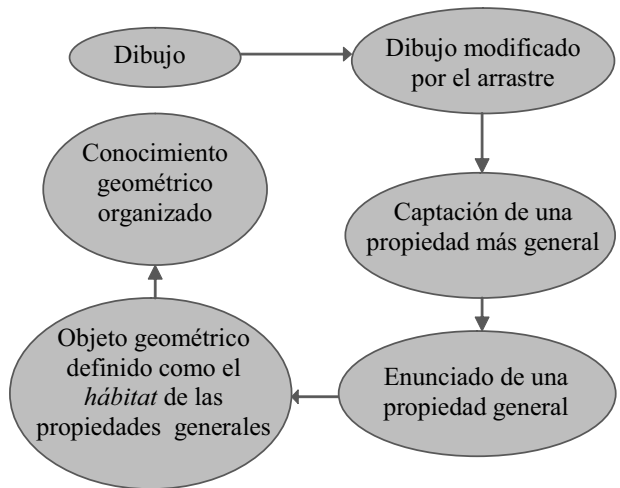


Fig. 37

Al tener la posibilidad de mover el punto interior preservando las relaciones estructurales de la construcción original y, usando la herramienta de cálculo que el programa tiene incorporada, pueden manipular la construcción y llegar a la conclusión de que la suma es una constante. La manipulación los lleva a constatar, no sólo este hecho sino que la suma de las distancias coincide con la medida de la altura del triángulo.

Mirando las posibilidades de la geometría dinámica estudiada en los ejemplos anteriores, en términos generales, un medio dinámico como *Cabri Géomètre* nos permite seguir la ruta que se presenta a continuación:



Actividades para el aula

- Formule una conjetura sobre las relaciones entre las medidas de un ángulo ABC y otro ángulo construido a partir de un punto O en el exterior o en el interior de $\angle ABC$ y cuyos lados son respectivamente perpendiculares a los del $\angle ABC$.
- Explore las posibilidades de construcción de un triángulo a partir de tres segmentos iniciales dados. Formule una conjetura sobre las relaciones entre las logitudes de

los segmentos para que ellos puedan ser los lados de un triángulo.

- Encuentre una relación entre la posición del ortocentro y el tipo de triángulo.
- Construya un segmento AB . Encuentre la posición de un punto P tal que $\triangle APB$ es isósceles y rectángulo
- Explore los invariantes que le permitan caracterizar la familia de triángulos ABC que se forman al construir una recta, un segmento AB sobre ella, una paralela a la recta inicial y un punto móvil C en ella.
- Construya un triángulo ABC y señale los puntos medios de los lados con D , E y F . Construya el triángulo DEF y explore las relaciones geométricas entre ambos triángulos.
- Dados un triángulo ABC y un triángulo UVW con sus vértices en los lados de $\triangle ABC$ establezca una conjetura sobre las posiciones de U , V y W para que el triángulo interior tenga perímetro mínimo.
- Determine cuáles son los datos mínimos para construir un triángulo determinado (piense en las longitudes de las alturas, medianas, puntos notables, etc.).
- Formule una conjetura respecto de las relaciones entre los ángulos consecutivos y las diagonales de un paralelogramo
- Formule una conjetura respecto a la longitud del segmento construido con extremos en los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio y la longitud de los lados paralelos.
- Formule una conjetura sobre cuál será la cuerda que pasa por un punto H localizado al interior de una circunferencia tal que el producto de las longitudes de los segmentos en que ésta queda dividida por el punto H , sea el mayor posible.
- Dados una circunferencia y dos radios fijos, establezca un proceso que le permita encontrar la cuerda que es trisecada por dos radios.
- Explore si la composición de simetrías es conmutativa o asociativa (tome los dos ejes de simetría paralelos, perpendiculares o secantes).
- Explore si la composición de traslaciones es asociativa.
- Formule una conjetura que relaciones las áreas o los perímetros de un triángulo equilátero y una circunferencia, cuando el triángulo está inscrito en ella.
- Estudie las diferentes posibilidades, según las posiciones relativas del ángulo y la diagonal, del rombo formado por un segmento \overline{AB} y un ángulo α .
- Dadas dos rectas y un segmento, explore en qué casos es posible construir una circunferencia tangente a ambas rectas cuyo radio tenga la misma longitud que el segmento.
- Dadas tres rectas, explore en qué casos es posible construir una circunferencia cuyo centro esté en una de las rectas y que sea tangente a las otras dos.
- Construya una circunferencia y un punto exterior a ella. Aplique la opción *Inversión* del menú F5 señalando la circunferencia y luego el punto. Formule una conjetura sobre las relaciones entre el punto inicial, el centro de la circunferencia y el punto que se generó.

4.4.5. Lugares Geométricos y curvas notables de la Geometría

La geometría dinámica cambia la forma de la enseñanza de la geometría. Tanto la práctica educativa como la investigación, han reconocido que la nueva forma de exploración geométrica es diferente a la que se puede llevar a cabo mediante los instrumentos clásicos, regla y compás y el razonamiento “basado en figuras mal dibujadas”. No son diferencias de apariencia: son diferencias de fondo.

La dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética con su representación visual. Una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar geometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos. Consideramos que estos acercamientos constituyen no sólo una actividad de gran atractivo geométrico sino que además pueden hacer ver a los estudiantes las relaciones existentes entre objetos geométricos que, generalmente, se estudian de manera aislada. Mostraremos ahora cómo pueden llevarse a cabo tales construcciones, dentro del entorno *Cabri Géomètre*, construyendo las cónicas, como lugares geométricos.

La *parábola* se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*. Por la limitación de las dimensiones de la pantalla de la calculadora, nuestra directriz será un segmento, y notaremos con F el foco de la parábola (figura 38).

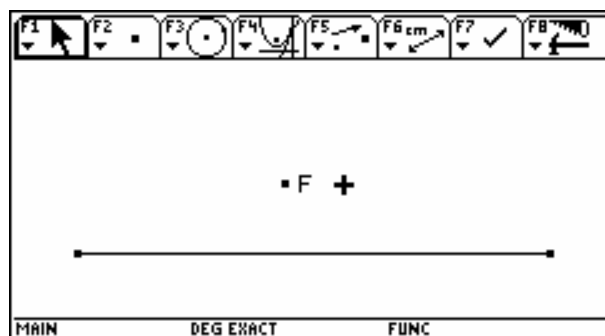
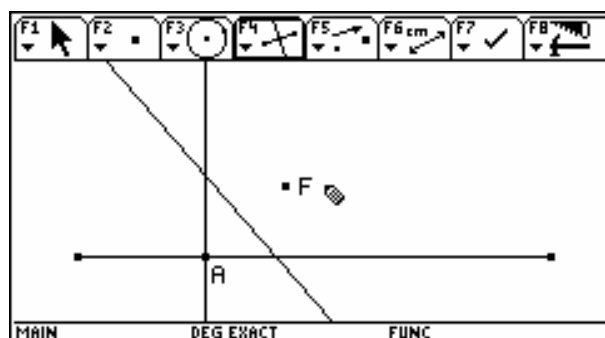
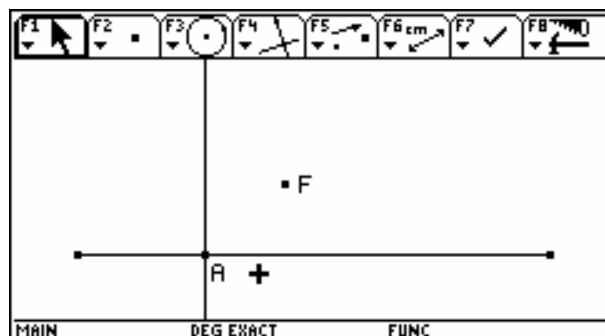


Fig. 38

Seleccionamos un punto arbitrario A en el segmento, y trazamos por él una perpendicular al mismo. Como el punto A se puede desplazar a lo largo de nuestra directriz, lo que hay que hallar son los puntos que equidistan de F y de A , y esos son los que se encuentran en la mediatriz del segmento que une ambos puntos. En el menú $F4$ de la calculadora hallamos el comando necesario para tal construcción. Si a continuación calculamos el lugar geométrico del punto que es intersección de esta mediatriz con la perpendicular a la directriz que pasa por F , obtenemos la parábola deseada (figura 39).



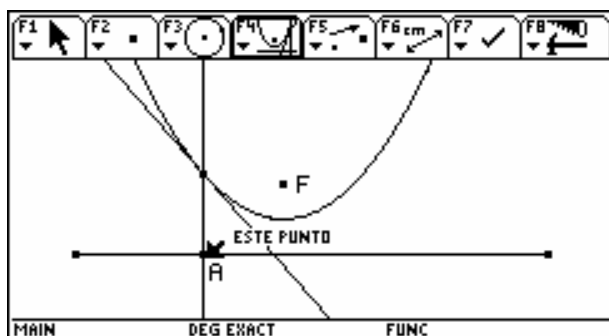


Fig. 39

La *elipse* se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de la manera que la suma de sus distancias a dos puntos, llamados focos de la elipse, se mantiene constante. Para realizar esta construcción en la TI 92, tomaremos una circunferencia y un punto interior a ella. Ese punto F_2 , y el centro de la circunferencia serán los dos focos de la elipse. Señalamos un punto arbitrario en la circunferencia serán los dos focos de la elipse. Señalamos un punto arbitrario en la circunferencia, y trazamos la mediatriz del segmento que une este punto con el foco F_2 . El punto de intersección de esta mediatriz con el radio que une el centro de la circunferencia con el punto que situamos en ella, define la elipse cuando éste se mueve a lo largo de la circunferencia. Una pregunta interesante es *¿qué pasa con la elipse cuando el foco F_2 se desplaza?* Si hacemos coincidir los dos focos, observamos cómo la elipse se convierte en circunferencia, mientras que arrastramos F_2 hacia el exterior de la circunferencia original, la elipse se transforma en una hipérbola (figura 40)

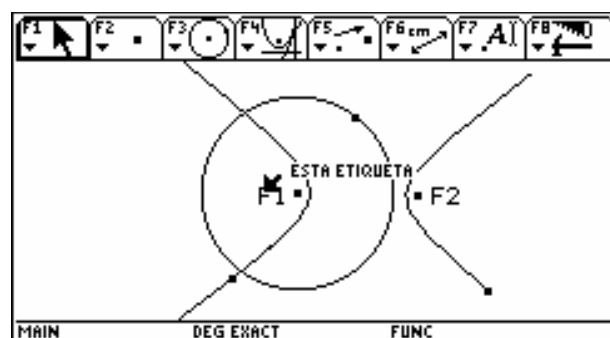
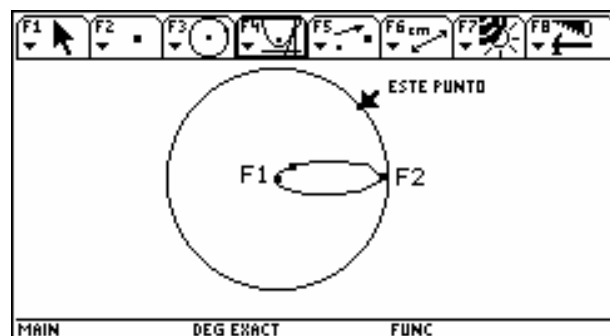
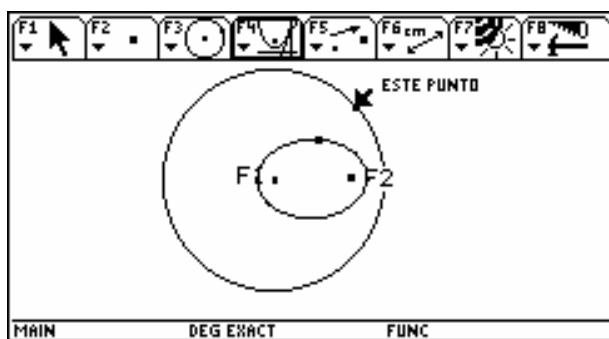


Fig. 40

Estas actividades dan idea del gran poder que poseen estos ambiente de geometría para consolidar y transformar el conocimiento matemático de los estudiantes, así como para crear nuevas relaciones entre piezas de conocimiento ya existentes, No sólo podemos realizar las mismas tareas que se hacen con papel y lápiz, sino que además ampliamos substancialmente el horizonte de la creación geométrica en el salón de clase.

Actividades para el aula

- Caracterice el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos P y Q .
- Caracterice el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas (estudie los casos, según la posición relativa de las rectas).
- Caracterice el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo APB

que forman con dos puntos fijos A y B es de 90° .

- Caracterice el lugar geométrico de los puntos medios de una escalera recostada sobre una pared cuando ésta se resbala.
- Determine el lugar geométrico del punto medio de una cuerda \overline{AB} , cuando B se mueve alrededor de la circunferencia y A queda fijo.
- Caracterice el lugar geométrico que resulta de la siguiente construcción:
 - Construya una recta d y un punto exterior a ella, llamado F
 - Trace una perpendicular e a la recta d que pase por F . Marque con G el punto de intersección de las dos rectas d y e
 - Construya el punto medio del segmento FG y márkelo con V
 - Construya un punto I en la semirrecta GF tal que $m(\overline{GF}) < m(\overline{GI})$
 - Con centro en F trace la circunferencia de radio \overline{GI}
 - Trace una paralela m a la recta inicial d , por el punto I
 - Construya los puntos de intersección de la circunferencia con la recta m
 - Active la traza de dichos puntos de intersección cuando el punto I se mueve.
- Caracterice el lugar geométrico que resulta de la siguiente construcción:
 - Construya una circunferencia C y un radio cualquiera de extremo P
 - Trace una tangente t a la circunferencia C por P
 - Tome un punto Q exterior a la recta t
 - Trace la perpendicular q a la recta t por el punto Q
 - Marque el punto de intersección R de las rectas t y q
 - Active la traza de R al mover P
- Caracterice el lugar geométrico que resulta de la siguiente construcción:
 - Construya una circunferencia C cualquiera
 - Construya una recta horizontal d que pase por el centro
 - Marque el punto de intersección de la circunferencia C con la recta d
 - Marque un punto X sobre la recta d
 - Mida la distancia desde el centro de la circunferencia hasta X . Esta distancia representa la longitud del arco de circunferencia.
 - Transfiera la medida sobre la circunferencia y llame P al punto de transferencia
 - Trace la perpendicular a la recta horizontal por P
 - Marque el punto Q de intersección de las perpendiculares
 - Construya el segmento PQ y el vector QX
 - Traslade el segmento PQ sobre X , usando el vector QX
 - Active la traza del extremo del segmento trasladado, al mover X .

4.4.6. Uso de entornos de geometría dinámica en la validación

Un entorno de geometría dinámica provee un contexto de acción y reflexión en el que tanto el alumno como el profesor tienen nuevas posibilidades expresivas que les ayudan a comunicar sus ideas y entender el discurso de los demás. La referencia a la figura supera la ambigüedad de la percepción, permitiendo su uso para la argumentación y la validación de conjeturas.

A partir de la dinámica entre la exploración y la sistematización de propiedades y relaciones geométricas presentes en la solución de un problema, se generan argumentos para comprobar afirmaciones y validarlas dentro del

contexto geométrico en que se trabaja. Estas actividades conforman parte esencial de la sistematización y el refinamiento de la argumentación para dar sentido a lo que se entiende en matemáticas como *sistema axiomático y demostración*. El uso del software se convierte así en un puente entre el conocimiento empírico que se valida a través de la ostensión y el conocimiento formal que se valida a través de la deducción.

Al poner de presente la necesidad de constituir dominios de abstracción en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, se pone en evidencia la necesidad de replantear la noción de argumentación, pues ésta debe verse como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición y no como una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto definidos de esquemas impuestos por la comunidad matemática. Dentro de un dominio de abstracción es posible construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí constituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor (Moreno, 1996). Así por ejemplo, al trabajar con *Cabri Géomètre* en un ambiente de resolución de problemas, se delimita un contexto cuyos argumentos provienen del mundo de la geometría dinámica y los recursos del software. La argumentación utiliza la información, los hechos aceptados en el entorno *Cabri Géomètre* y las posibilidades de construcción geométrica constituyéndose así en un socio cognitivo que apoya a los estudiantes en su paso hacia la formalización dentro de una teoría geométrica. De esta manera se va construyendo de manera simultánea la racionalidad matemática a partir de un dominio de abstracción y la actividad de validar, que exige la solución de un problema.

Aunque la demostración, entendida como mecanismo de incorporación de un hecho matemático a una teoría de tal manera que éste sea resultado de la misma, constituye el método de validación por excelencia de las proposiciones matemáticas, el énfasis en las demostraciones ha comenzado a cambiar en el ámbito educativo ante el interés por el estudio de las prácticas matemáticas que resaltan la importancia de la argumentación como mecanismo de explicación, verificación, constatación de hechos, y validación, con un sentido de interesar más que de formalizar.

Por esto afirmamos que la riqueza didáctica generada por la interacción con el programa *Cabri Géomètre* va más allá de la exploración y la comprobación de propiedades. La interacción con el programa da ideas al aprendiz de las relaciones implícitas en las condiciones del problema, de la lógica particular de construcción y de los argumentos que se deben usar para una demostración formal dentro de una teoría geométrica. Esta experiencia motiva a estudiar más a fondo las posibilidades de formalización a partir de un conjunto de *axiomas* (proposiciones implícitas) propios de *Cabri Géomètre* que serán el punto de partida para realizar un trabajo de argumentación y demostración formal en este contexto.

Para aprovechar al máximo el potencial del software, en actividades de validación, es necesario conjugar cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático y que discriminamos para efectos de claridad en la exposición de las ideas: *la exploración, la construcción, la argumentación y la demostración*. La *exploración* surge al intentar enfrentarse a la solución de un problema y que da pie a la formulación de conjeturas para generar estrategias de solución, la *construcción*, pone en evidencia las propiedades geométricas en juego y las relaciones

entre ellas, constituyéndose en la semilla de la deducción, la *argumentación* se constituye en un mecanismo para validar afirmaciones dentro del contexto en el que se está trabajando, a partir de la elaboración de inferencias de carácter deductivo y *la demostración* con la cual, las proposiciones geométricas se incorporan a una teoría geométrica.

Veamos como un profesor de matemáticas se enfrentó a la solución del siguiente problema (Acosta, Camargo, Rodríguez, 2002): *Construir un triángulo equilátero de tal forma que cada uno de sus vértices esté sobre cada una de tres rectas paralelas dadas.*

El profesor comenzó su *exploración* construyendo tres rectas paralelas a, b, c y un segmento AB' de tal forma que A estuviera sobre a y B' estuviera sobre b . Luego construyó el punto C' de tal forma que el triángulo $AB'C'$ fuera equilátero (figura 41). Al mover el punto B' sobre la recta b , el punto C' se movía en la pantalla, lo que permitió visualizar relaciones existentes entre el lugar geométrico de C' , las rectas paralelas y el triángulo equilátero buscado. Aparentemente este lugar geométrico era una recta que cortaba a las otras tres. Además, uno de los vértices del triángulo buscado debía ser el punto de corte del lugar geométrico y la recta c .

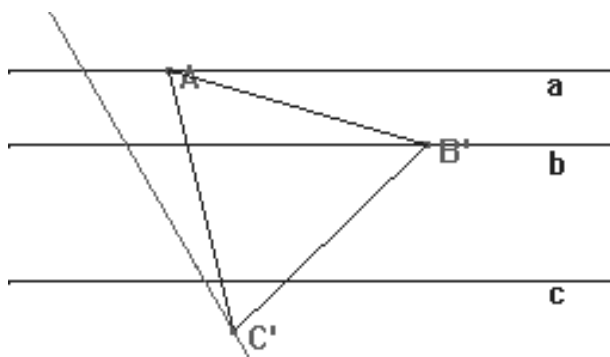


Figura 41

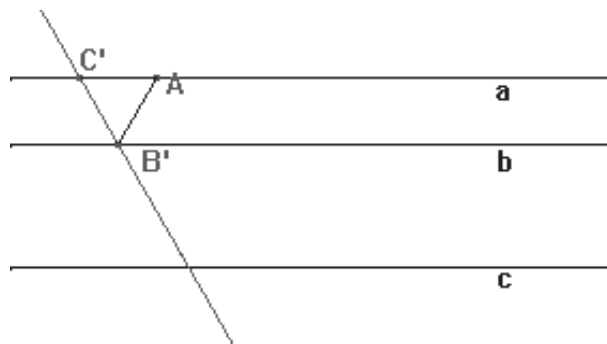


Figura 42

En un instante de la exploración (figura 42) el profesor observó que cuando C' estaba sobre la recta a , B' parecía estar en el lugar geométrico de C' , lo que indicaba que el lugar geométrico de C' debía ser una recta que formaba un ángulo de 60° con las rectas paralelas dadas, pues $AB'C'$ era equilátero.

Construyó entonces una recta l formando un ángulo de 60° con las rectas paralelas y nombró con P_1, P_2 y C los puntos de intersección (figura 43). El punto C debía ser uno de los vértices del triángulo buscado pues correspondía a la intersección de la recta c con el lugar geométrico de C' .

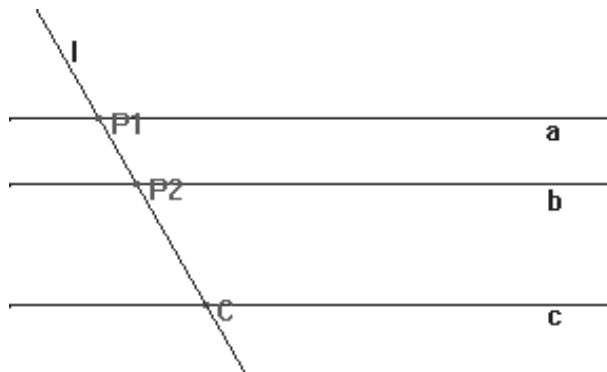


Fig.43

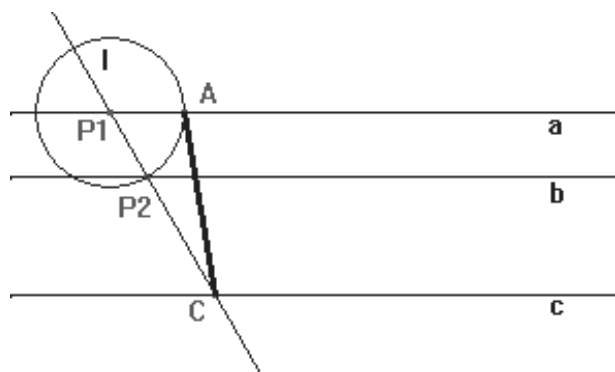


Fig.44

El punto A del triángulo que se estaba buscando debía estar sobre a y además P_1P_2 debía ser congruente con P_1A (figura 44). El profesor construyó A sobre a con esas características. Así, \overline{AC} debía ser uno de los lados del triángulo buscado. Después trazó dos circunferencias con centros en C y A y radio AC , respectivamente. El punto de intersección B de estas circunferencias debía ser el tercer vértice buscado (figura 45).

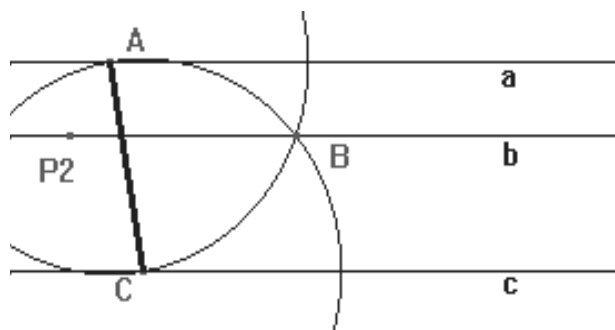
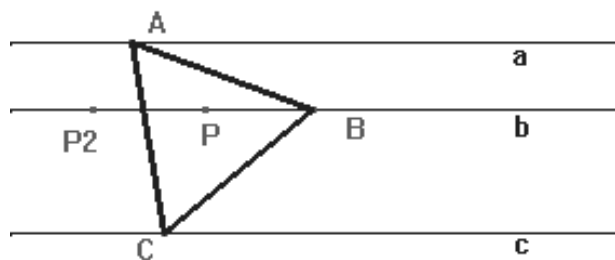


Fig. 45



Estos puntos están alineados

Fig. 46

La construcción mostraba explícitamente que el triángulo ABC era un triángulo equilátero. Lo que no sabía con certeza era si B estaba o no en la recta b . Para *argumentar* este hecho usó los recursos del programa *Cabri Géomètre*, aceptados como válidos en este dominio de abstracción. Tomó un nuevo punto P sobre b y preguntó al programa si P_2, B y P estaban alineados. En efecto, el programa respondió que así era (figura 46).

El profesor se puso en la tarea de demostrar el hecho de que el triángulo obtenido al realizar la construcción en realidad era equilátero. Observemos que esto no quiere decir que no pudiera serlo, ya que lo hecho hasta el momento no deja ninguna duda. El uso de las palabras *...en realidad...* quiere decir que el hecho ya obtenido se puede incorporar a una teoría geométrica para que se vea como resultado de la misma. Lo que hizo el profesor fue realizar una nueva construcción, a partir de la evidencia recopilada en su primer intento, que permitiera una manera más sencilla de deducir el hecho de resultados de una teoría geométrica. La teoría geométrica a la que nos referimos aquí es cualquiera que acepte los siguientes hechos como *verdaderos*, en el sentido de que se han deducido de un conjunto de axiomas que no vamos a especificar:

- Lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- Diagonales correspondientes de paralelogramos congruentes son congruentes.

Estos hechos se deducen de las proposiciones que se refieren a la congruencia de triángulos a partir de la congruencia de ciertos lados y ángulos correspondientes de los mismos (LAL, LLL, etc.) y las correspondientes a los ángulos alternos internos formados por una recta que corta dos paralelas. Al profesor no le interesaba hacer una demostración con todo detalle del

hecho, sino mostrar la posibilidad de hacerlo. La construcción que realizó, a partir de la exploración que había hecho inicialmente, es la siguiente.

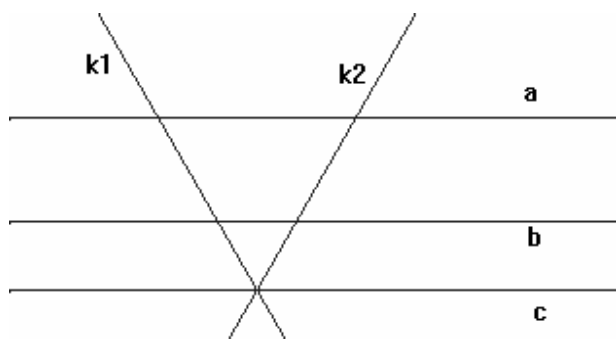


Figura 47

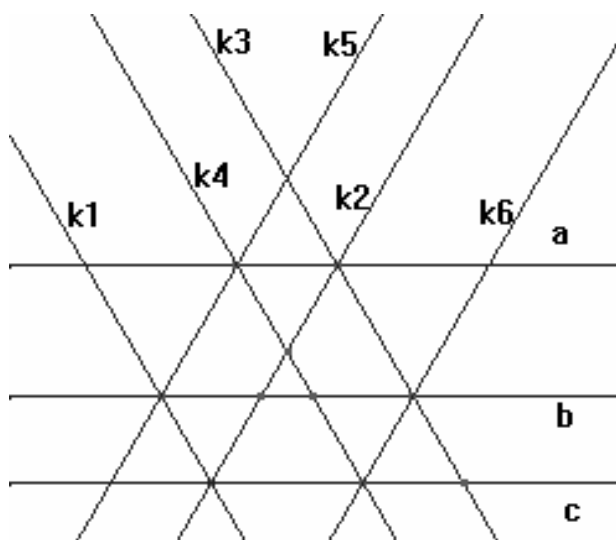


Figura 48

La recta k_1 forma un ángulo de 60° con las rectas a , b , y c , y la recta k_2 forma a su vez un ángulo de 60° con k_1 (fig. 47). Las rectas k_3 , k_4 , k_5 , y k_6 se construyeron todas, mediante paralelismo con k_1 y k_2 (fig. 48). Por consiguiente, los paralelogramos de la figura 49 son congruentes, de donde el triángulo de la figura 50 es equilátero.

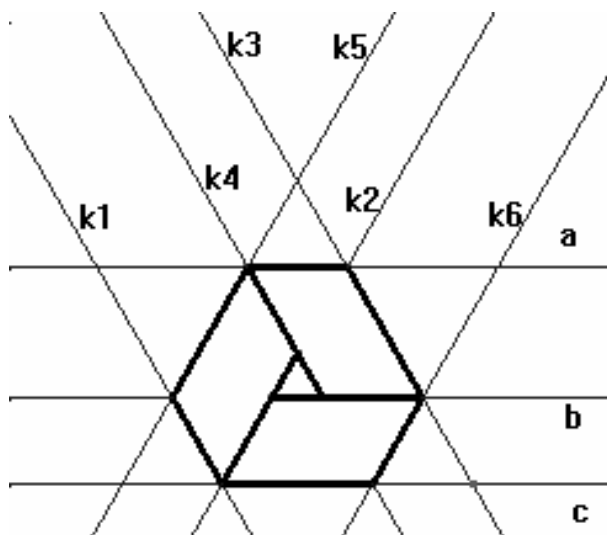


Fig. 49

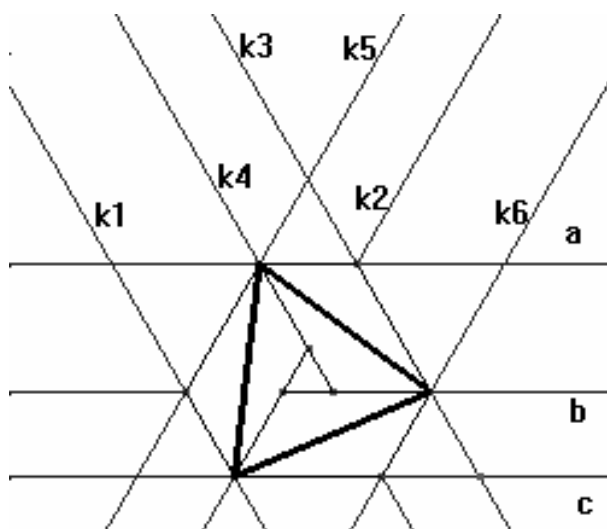


Fig. 50

Examinemos un segundo ejemplo de tarea geométrica, propuesto a alumnos de grado noveno: *dados un segmento AB y un punto M cualquiera, construir un triángulo ABC de manera que el punto M sea el ortocentro.*

Esta tarea exige una interpretación teórica del ortocentro, y del significado de las alturas. Sin embargo, podría trabajarse como tal en un entorno de papel y lápiz, con la posibilidad de

que los alumnos no partan de un análisis de las relaciones al interior de la figura, sino que realicen un dibujo únicamente a base de ajustes perceptivos.

Siguiendo los pasos sugeridos de exploración, construcción y argumentación expondremos las acciones emprendidas por un estudiante. Inicialmente el trabajo consistió en una *exploración* informal de la situación que lo llevó a construir de las rectas AM , y BM (figura 51).

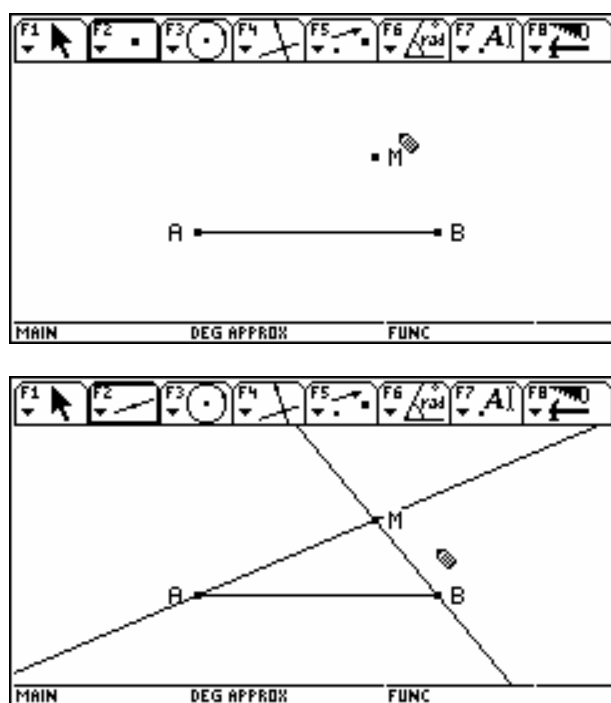


Fig.51

En ese momento creyó el problema resuelto pues, para él, el triángulo AMB era rectángulo y el ortocentro M estaba situado en el vértice común a los catetos. Al comprobar que las rectas AM y BM no eran perpendiculares (con la herramienta de comprobación del software), optó por una nueva estrategia, para lo cual, tomó un punto C , al azar, y construyó el triángulo ABC ; luego comenzó a desplazarlo por la pantalla para intentar “cuadrar” a ojo las rectas AM y BM ,

como alturas del triángulo. Esta exploración lo condujo a recordar la relación de perpendicularidad entre la altura y el lado correspondiente, lo que le dio una vía de *construcción*. Borró el punto C , con lo cual se borraron los segmentos AC y BC y construyó una perpendicular a AM por B y una perpendicular a BM por A . En el punto de corte señaló el vértice C del triángulo (figura 52). La argumentación de por qué el punto C tenía que estar en la intersección de las rectas construidas se basó en que el ortocentro debía estar tanto en la mediatriz de AC , como en la de BC , por lo tanto en el punto de corte.

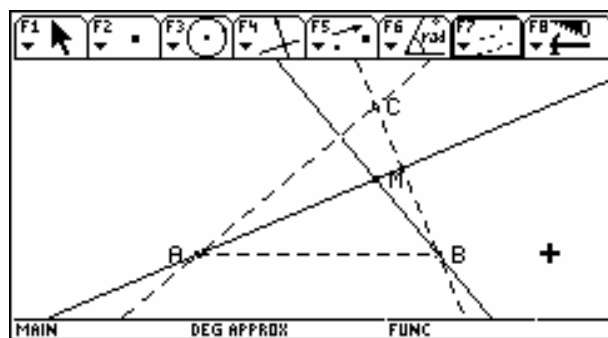


Fig.52

En el entorno de geometría dinámica en el que se trabajó, la tarea puede enriquecerse, pues una vez terminada la construcción el profesor puede solicitar a los alumnos arrastrar el punto M para verificar la invariabilidad de la propiedad (M ortocentro), o también puede pedir buscar las posiciones de M para las cuales el triángulo ABC no existe, y explicar por qué no existe.

El entorno de geometría dinámica permite en este caso no sólo al alumno recibir una información perceptiva que le sirve para validar o invalidar sus acciones, sino también al profesor expresar en una manera inteligible para el alumno, una tarea compleja como la de encontrar casos extremos de una construcción. Esta prolongación de la actividad sería demasiado compleja para realizar en papel y

lápiz, mientras que en un entorno de geometría dinámica la modificación pedida es un simple desplazamiento de un punto, que produce un comportamiento inesperado para el alumno: en algunas posiciones de M, el triángulo deja de existir, provocando la necesidad de una explicación.

La necesidad de idear una explicación puede ser mas fuerte si se pide a los alumnos producir fenómenos que son imposibles de visualizar. Preguntas como: *¿es posible construir un triángulo con dos bisectrices perpendiculares o: ¿es posible construir un triángulo con dos ángulos obtusos?* requieren una demostración, porque no es posible obtener un triángulo que satisfaga las condiciones pedidas. Probablemente al plantearles este tipo de tareas a alumnos de grados sexto o séptimo, pueden estar convencidos de la posibilidad de obtener esos triángulos y tratan insistentemente de dibujarlos. Pero después de varios ensayos infructuosos se dan cuenta de que puede ser algo imposible y la pregunta por qué es muy significativa para ellos porque se basa en su propia experiencia.

Actividades para el aula

- Construya un cuadrado y justifique por qué puede afirmar que lo es.
- Pruebe que los segmentos en que quedan divididas dos rectas intersecantes cuando son cortadas por tres rectas paralelas, son proporcionales.
- Pruebe que las bisectrices de dos ángulos que forman un par lineal son perpendiculares.
- Construya un triángulo cualquiera y trisecte los lados. Después, construya los segmentos formados del vértice a los puntos de trisección tomados alternadamente (figura 53) Señale los puntos de intersección de las tres

líneas y construya el triángulo que se constituye con estos. Pruebe que la razón de las áreas del triángulo grande y el pequeño es igual a 7.

- Construya un triángulo cualquiera. Sobre cada lado construya un triángulo equilátero con su respectivo centroide. Compruebe que al unir los centroides siempre se forma un triángulo equilátero. (¿Qué pasa si la figura inicial es un cuadrilátero?).

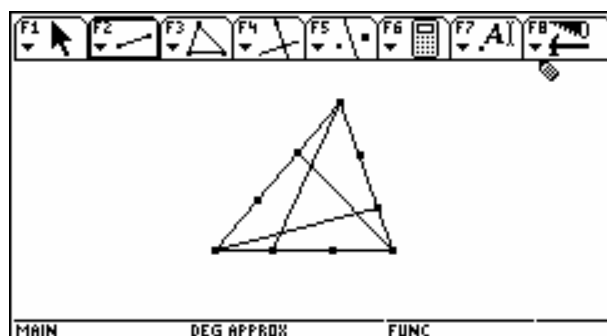


Fig. 53

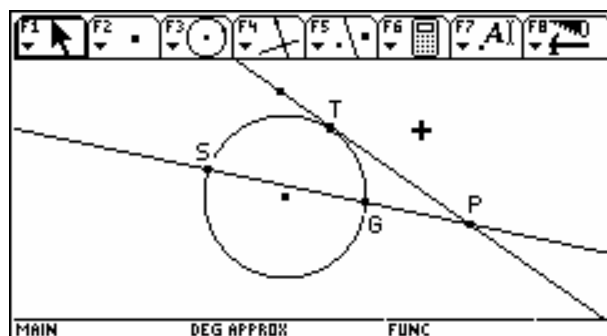


Fig. 54

- Construya una circunferencia y señale un punto P exterior a ella. Construya la tangente a la circunferencia por el punto exterior P y llame T al punto de tangencia (figura 54). Construya una secante a la circunferencia que pase por P. Llame G y S a los puntos de corte de la recta con la secante. Pruebe que $TP/SP = GP/TP$.

4.4.7. Conexión con otros campos de la matemática: La modelización y la simulación

Hemos desarrollado ya ampliamente de qué manera la geometría dinámica permite el trabajo simultáneo en el registro figural que activa procesos de visualización y el registro simbólico que activa procesos discursivos, desarrollando la articulación de los dos. En ese sentido, aportan elementos valiosos para el aprendizaje pues, como ya se mencionó, es a partir de la relación estrecha entre estos registros en donde reside la posibilidad de aprender geometría. En esta sección veremos cómo el uso del software de geometría dinámica posibilita también, gracias a la toma de datos, la articulación con los registros numérico y analítico (algebraico), ampliando los registros de representación para conectar el ámbito geométrico con el métrico, el variacional y el análisis de datos.

En efecto, el programa Cabri Géometre instalado en calculadoras graficadoras permite desarrollar estrategias de simulación y modelación en la resolución de problemas. Antes de ejemplificar su uso distinguiremos estas dos clases de procedimientos. Por simulación estamos denominando una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual, sin intervención del modelo formal del fenómeno o del proceso. Por su parte, una modelación es una representación formal de un proceso o de un fenómeno a través de expresiones cualitativas o cuantitativas de las relaciones entre variables que describen el proceso o fenómeno, expresiones que son susceptibles de manipular. Entre estas dos situaciones extremas hay todo un continuo de situaciones posibles que combinan en mayor o menor grado ambos procedimientos (Duarte, 1997).

Si en tareas que combinan procedimientos de simulación y modelación se hace intervenir el

análisis numérico de datos tomados de una construcción, se posibilita la creación de relaciones entre los registros figural, numérico y analítico. Veamos un ejemplo resuelto por estudiantes de grado noveno a quienes se les pidió resolver el siguiente problema: *construir un segmento AB de longitud 3 cm, colocar un punto P sobre él y construir un rectángulo cuyas dimensiones sean las longitudes AP y PB para analizar la variación de su área y elegir e las dimensiones del rectángulo de mayor área* (Viñas, 2002).

Los estudiantes hicieron la construcción que se muestra en la figura 55 y comenzaron a explorar los distintos rectángulos obtenidos a partir del movimiento del punto P sobre el segmento AB. Variando la posición de P, variaban las dimensiones, los rectángulos y sus áreas. Empezaron a conjeturar sobre el rectángulo de área máxima, según lo que observaban en la pantalla, llegando a la conclusión de que este tenía que ser el cuadrado.

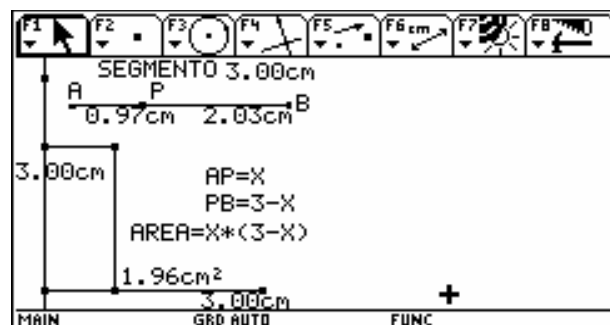


Fig. 55

Para confirmar su hipótesis se les pidió que transfirieran las medidas del segmento AP y del área a dos semirrectas perpendiculares que asemejaban un sistema coordenado y que obtuvieran el punto Q de corte de las rectas perpendiculares a los ejes por los puntos de transferencia. Al animar el punto P, dejando la huella de Q, encontraron el lugar geométrico de puntos que representa la relación de variación longitud de

un lado del rectángulo vs área del mismo (figura 56). Se les solicitó explorar las relaciones entre el punto máximo de la curva y la posición de P en el segmento AB , con lo que llegaron a la conclusión de que el máximo valor del área se obtenía en el punto medio del segmento determinado por los puntos inicial y final de la gráfica de la parábola trazada, es decir cuando P estaba en el punto medio de AB .

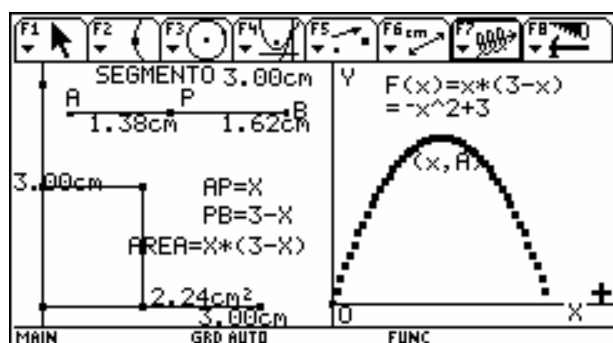


Fig. 56

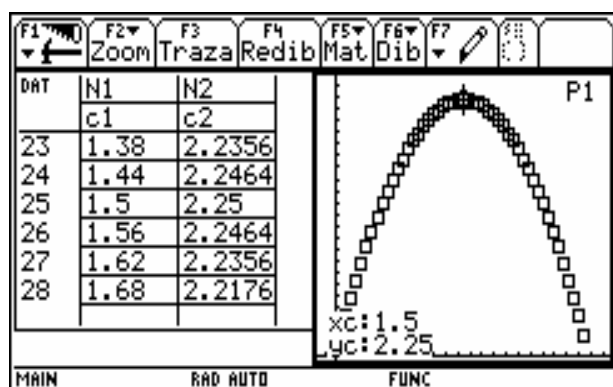


Fig.57

Se hizo un registro en el editor de datos, de los valores de la longitud del lado del rectángulo y el área del mismo en diversas posiciones del punto P , con el fin de hacer la representación gráfica de estos puntos y ver qué similitud guardaba esta representación con la gráfica trazada por el lugar geométrico (figura 57)

Adicionalmente se les pidió formular algebraicamente la relación área vs lado del rectán-

gulo y estudiar su representación simbólica. Al vincular la ecuación con los registros gráficos, tabulares y geométricos se dio significado a las variables en cuestión y se logró una interpretación correcta del problema inicial.

De igual manera, pueden realizarse construcciones geométricas que simulan objetos reales o simplemente figuras tridimensionales, y que sirven como modelos de exploración para determinar sus propiedades o las relaciones entre sus componentes. El hecho de poder manipular los componentes de la figura por medio del arrastre y al mismo tiempo realizar mediciones que pueden ser tabuladas y representadas gráficamente, ofrece un gran potencial para conectar los conocimientos geométricos con conocimientos numéricos, algebraicos y de las ciencias, con el fin de estudiar y solucionar problemas.

Por ejemplo, para estudiar el siguiente problema:

Si se toma una pirámide recta con un triángulo rectángulo isósceles de base, puede inscribirse en ella un prisma triangular recto que cambia de volumen dependiendo de su altura. Estudie la relación entre el volumen del prisma y su altura, se puede realizar un modelo en Cabri que representa el prisma dentro de la pirámide, en el cual puede variarse la altura y observar la variación del volumen, como se indica a continuación.

La construcción de la simulación parte de la representación de la pirámide en dos dimensiones. Para ello se usa una perspectiva isométrica, pues es aquella en la que los segmentos paralelos a los ejes conservan una misma unidad de medida. Para visualizar la perspectiva isométrica tenemos que imaginarnos un cubo del cual se toman tres de sus aristas concurrentes para representar los tres ejes coordenados en el espacio. Si nos imaginamos cómo se verán estas tres aristas, al colocar el vértice opuesto

frente a sí, tendrá una imagen de la perspectiva isométrica.

Utilizando la herramienta Polígono Regular construimos un triángulo equilátero. Luego trazamos semirrectas desde el centro hacia los vértices. Así tenemos la representación del espacio (figura 58).

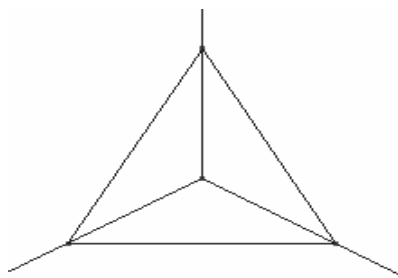


Fig. 58

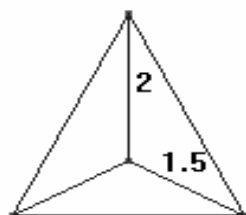


Fig. 59

Ocultemos el polígono regular y los tres vértices. Ahora escribamos los números correspondientes a las longitudes de la base y la altura de la pirámide (1,5cm y 2cm) (figura 59). Luego transfiramos esas medidas a los ejes horizontales y vertical. Finalmente una los puntos con segmentos y oculte las semirrectas para tener una imagen de la pirámide.

Coloquemos un punto H sobre el segmento vertical para representar la altura del prisma. Ahora tracemos paralelas a los ejes horizontales por H . Los puntos de intersección de esas paralelas con las aristas de la pirámide serán los vértices de la cara superior del prisma (figura 60).

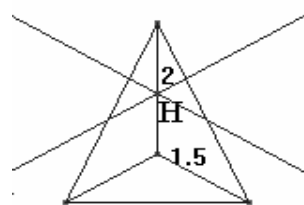


Fig.60

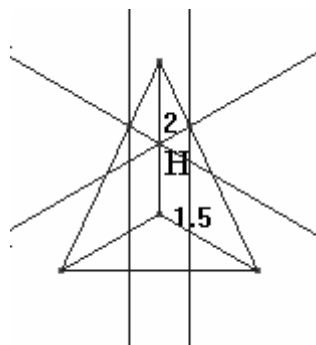


Fig. 61

Para encontrar los vértices de la cara inferior bastará con proyectar esos puntos sobre la base de la pirámide (con rectas paralelas al eje vertical) (Fig. 61)

Tracemos los segmentos correspondientes a las aristas del prisma, y coloquemos los del fondo punteados. Ocultemos los objetos intermedios para obtener la representación del problema (figura 62). Movamos el punto H para ver qué sucede con el prisma.

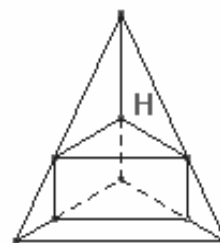


Fig. 62

Al medir las aristas de la base y la altura para calcular el volumen del prisma podemos estudiar

el problema propuesto identificando la variación del volumen a medida que varía su altura, registrando en una tabla los datos arrojados por la simulación, buscando el tipo de gráfica que se producirá al relacionar la altura con el volumen del prisma y encontrando la expresión algebraica que mejor relaciona el volumen del prisma y su altura.

En síntesis, al aprovechar las posibilidades de modelación y simulación se favorecen actividades como la representación geométrica de relaciones entre magnitudes, la toma de datos y graficación de relaciones entre variables, el estudio de escalas y otras limitaciones del movimiento y la representación de objetos tridimensionales

Actividades para el aula

- Se desea construir una caja sin tapa a partir de un trozo rectangular de material, recortando cuadrados de igual tamaño de las esquinas y doblando. ¿Qué sucede con el volumen de la caja a medida que varía el tamaño de los cuadrados recortados de las esquinas?
- Estudie como varía el perímetro de los triángulos con igual área. ¿Cuál tiene mayor perímetro?
- Estudie entre todos los polígonos de igual perímetro, cuál tiene mayor área.
- Estudie las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, con un ángulo de 45° .
- Un pastor tiene tres cuerdas de 10 m para encerrar un terreno en forma de trapecio de máxima área, limitado por un lado con un río. ¿Cómo debe colocar las cuerdas para obtener la máxima área?
- Tome una hoja de papel y dóblela de manera que una de sus esquinas quede sobre el lado opuesto; se forma un polígono en la parte frontal de la hoja. Estudie la variación del área de ese polígono a medida que varíe la posición de la esquina sobre el lado opuesto.

5

ALGUNAS EXPERIENCIAS DE AULA CON TECNOLOGÍA DE DOCENTES DEL PROYECTO

En este capítulo presentaremos algunas actividades diseñadas y puestas en práctica por los profesores del proyecto. Estos ejemplos, más que productos acabados, deben verse como indicadores de un proceso de integración de la tecnología en el salón de clases y no deben entenderse como recetas listas para llevar a cabo en cualquier contexto, asegurando unos resultados determinados. Son fruto del esfuerzo de profesores de diferentes regiones del país, que responden a contextos socioculturales propios de sus instituciones, por lo tanto, son diversos en su concepción, descripción y análisis. Sin embargo, en todos ellos puede apreciarse el papel protagonista de la tecnología.

Nuestra experiencia nos ha mostrado que el proceso de incorporación de la tecnología es muy complejo y cualquier esfuerzo de uniformización es contraproducente. La incorporación de la tecnología no implica solamente la utilización de una herramienta nueva, sino una actitud nueva hacia las matemáticas, un cambio de concepciones y hábitos de pensamiento y de acción, que no puede producirse de manera mecánica. Este proceso varía de una persona a otra. Solicitamos entonces a cada lector hacer una lectura selectiva, tratando de reconocer los aspectos que podrá recuperar y adaptarlos a su propio contexto institucional y a su propia evolución personal.

Las primeras cuatro propuestas tienen en común la intención de *mostrar* alguna relación matemática, relación entre el círculo trigonométrico y la

gráfica de las diferentes funciones, la relación entre áreas de polígonos semejantes construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, etc. Constituyen un indicador de la nueva capacidad expresiva del profesor, quien comienza a utilizar la tecnología en sus clases. El software es utilizado sobre todo para ilustrar relaciones teóricas que normalmente se abordan en el currículo.

Otras características importantes son el carácter lineal de la actividad planificada, una secuencia ordenada y detallada de acciones y preguntas, evitando o ignorando cualquier digresión por parte de los estudiantes; y el carácter cerrado de las preguntas planteadas a los estudiantes, preguntas que suponen una sola respuesta correcta. Podríamos explicar estas características por una intención de control muy fuerte por parte del profesor, quien de antemano quiere llegar a un resultado determinado.

Las hemos colocado como ejemplos de un primer nivel de integración de la tecnología, en el que el énfasis está puesto sobretodo en lo que *el profesor* puede hacer o mostrar con la tecnología. Veremos en otras propuestas cómo la experiencia va generando un cambio de énfasis hacia lo que *el alumno* puede hacer o comunicar con ayuda de la tecnología, y por lo tanto se preocupan más por la interacción entre los aspectos visuales y discursivos.

La quinta actividad es emblemática del cambio de énfasis del que habíamos hablado. Si bien el profesor inicialmente había previsto *mostrar*

a los alumnos cómo dibujar el símbolo del yin - yang con la calculadora, en el curso de la actividad decide observar lo que los alumnos pueden hacer con la calculadora. Así que en lugar de dar una secuencia detallada de instrucciones, simplemente plantea el problema de reproducir el dibujo en la calculadora y toma nota de las producciones de los alumnos.

En las últimas cuatro actividades, puede verse claramente cómo el papel protagónico lo tienen los alumnos y no el profesor. Además, las actividades han perdido su carácter lineal, pues deben contar con las diferentes propuestas de los alumnos. Esto no quiere decir que el profesor no pueda prever un desarrollo de la actividad sobre la base de unos objetivos de aprendizaje, sino que ese desarrollo es flexible, pues se apoya sobre todo en lo que los alumnos hacen o dicen al tratar de resolver un problema. Así que toda la actividad se organiza alrededor de unas pocas preguntas de carácter global. Por su parte, el uso del software no está enfocado principalmente en la constatación de relaciones visibles en la pantalla, sino en permitir diferentes acciones de parte de los alumnos, dando al mismo tiempo un elemento de validación o invalidación de sus construcciones. Alrededor de esa interacción de los alumnos con el software puede organizarse la tarea de argumentación, que busca articular los aspectos discursivos y visuales del conocimiento así producido.

5.1 La construcción de las funciones trigonométricas

Profesores: Jesús Euler Coral Bernal y Jaime Oswaldo Enríquez Solarte

Institución: Institución Educativa Nacional Sucre. Ipiales, Nariño.

Grado: Décimo

Descripción: La actividad consiste en proponer a los estudiantes un procedimiento para modelar la función trigonométrica “seno”, para que ellos, por una vía semejante, propongan cómo graficar la función “coseno”.

Enunciado: A continuación se encuentran las instrucciones para graficar la función trigonométrica seno, en el programa Cabri.

- Reproducir cada paso para obtener el modelo de la función
- Escribir las instrucciones para obtener el modelo de la función trigonométrica coseno.

Instrucciones para construir el modelo gráfico de la función seno

- Activar los ejes coordenados y editar la unidad, que se transfiere al eje X para construir en círculo trigonométrico (figura 63)

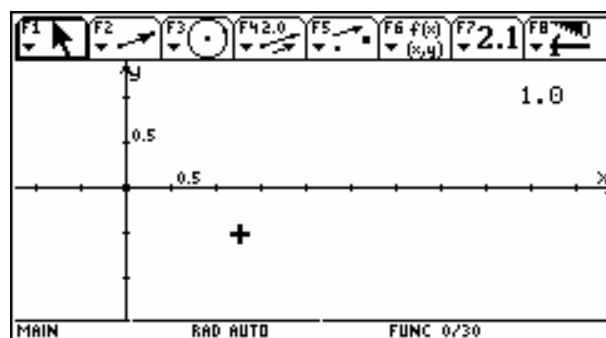


fig. 63

- Ubicar un punto, punto móvil en el dominio de la función, en el eje X y encontrar las coordenadas de dicho punto. Transferir la abscisa al círculo trigonométrico a partir del punto (1,0) (figura 64)

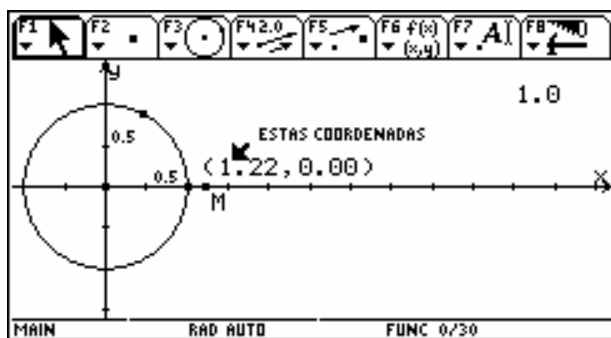


figura 64

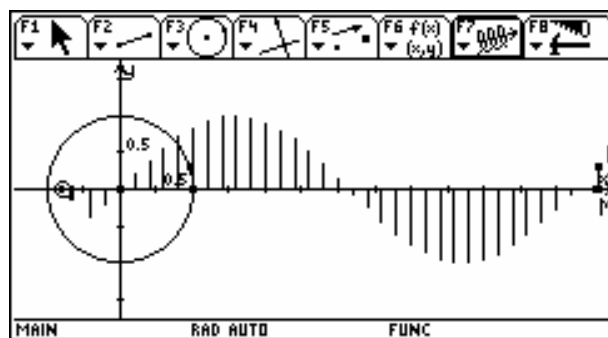


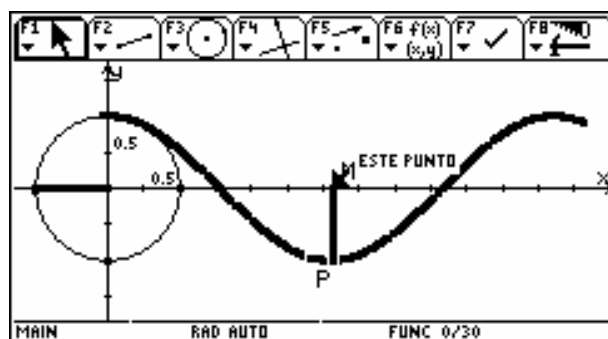
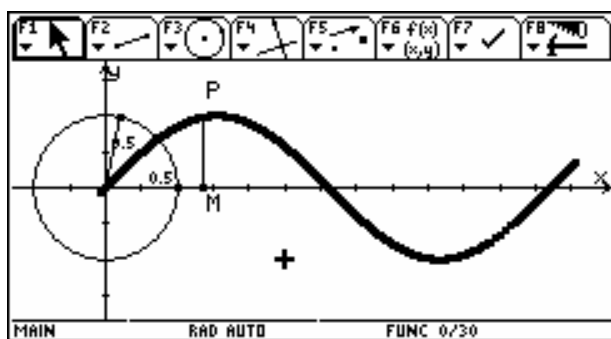
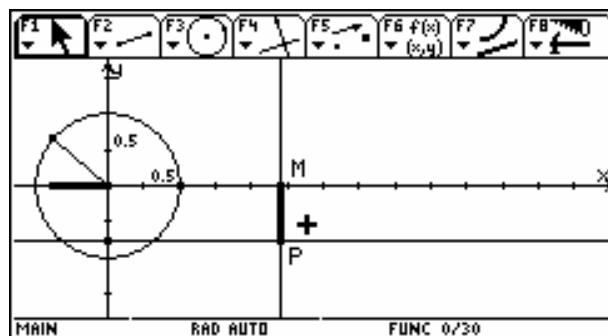
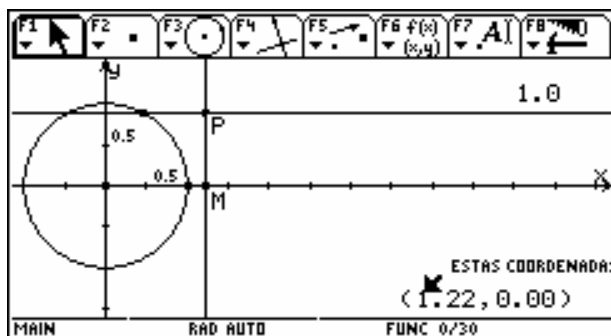
Figura 65

- Generar la línea trigonométrica del seno y ubicar el punto de intersección de ésta con una perpendicular al eje X por el punto móvil en el dominio de la función. Hallar el lugar geométrico que genera este punto (figura 65).

Algunos resultados:

La mayoría de los estudiantes lograron las siguientes imágenes de la construcción de la línea trigonométrica del coseno y del lugar geométrico obtenido (figura 66)

Función Coseno



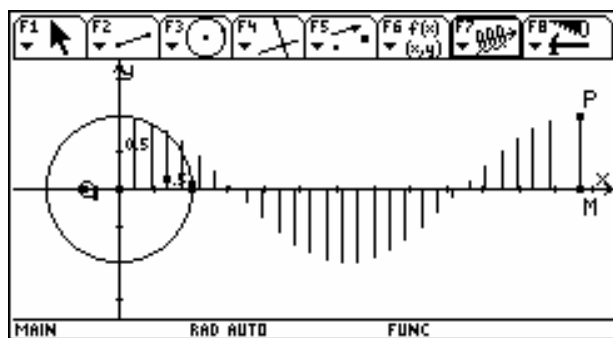


Fig. 66

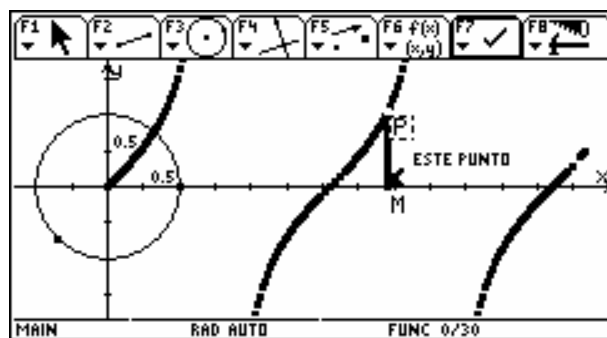
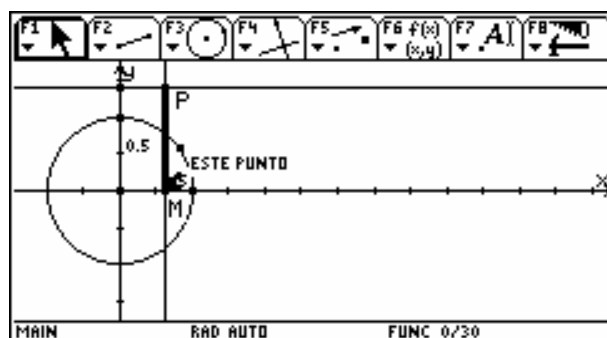
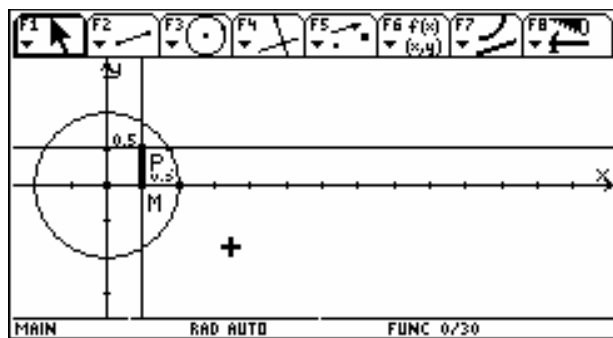
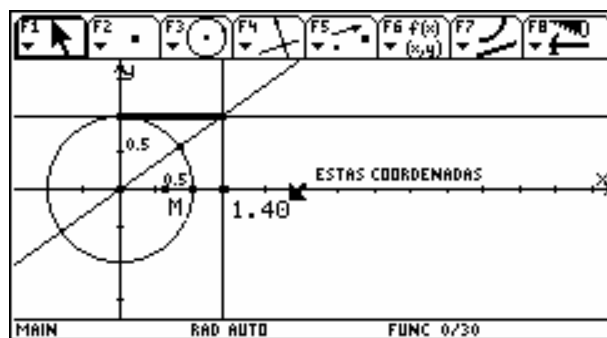
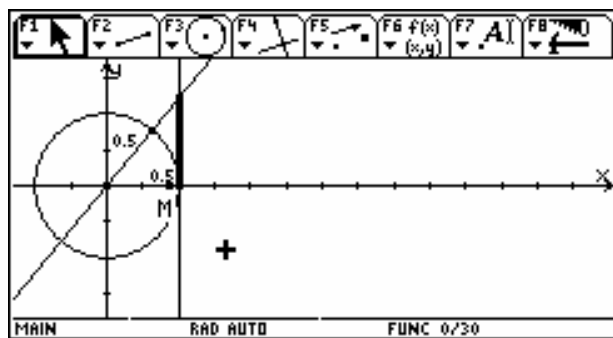
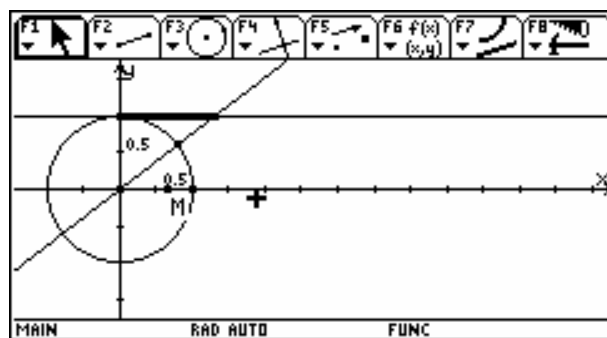


Fig. 67

Función Cotangente. (Figura 68)

Dos de los estudiantes, adicionalmente, construyeron la función tangente y la función cotangente, de la siguiente forma (Figura 67):

Función Tangente



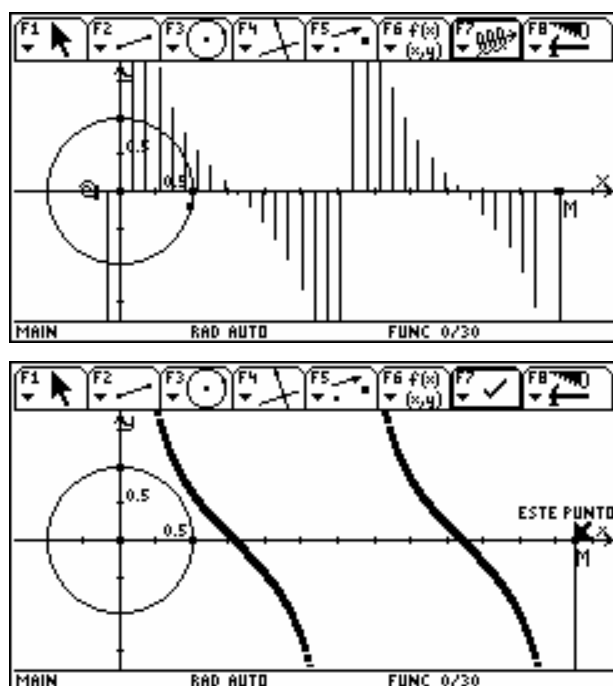


Fig. 68

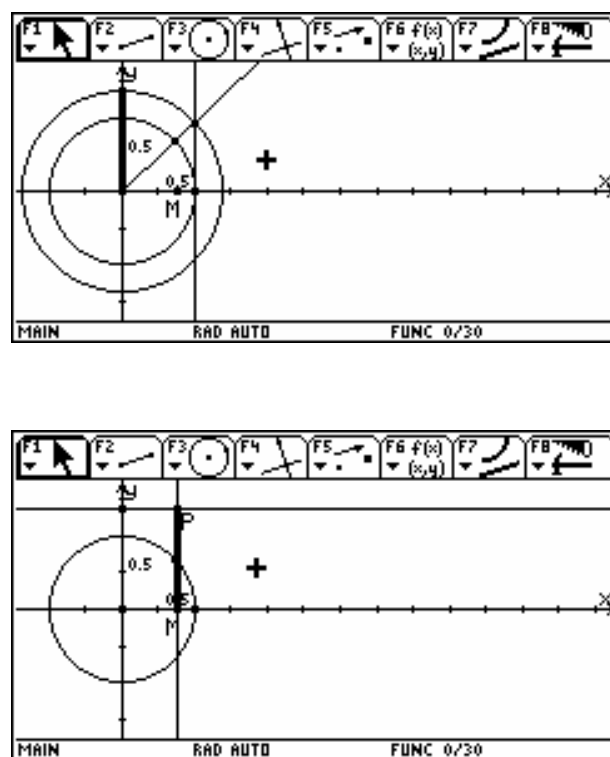


Fig. 69

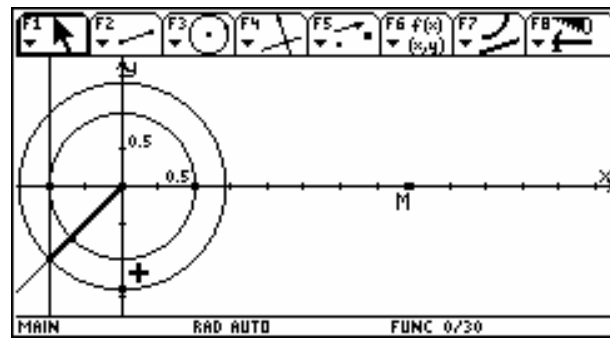
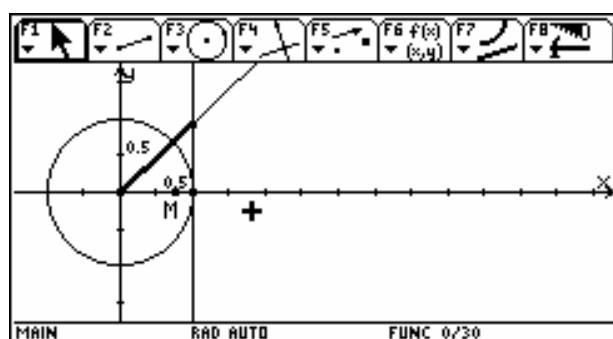
Actividades complementarias:

Dado el interés generado por las construcciones realizadas por los alumnos se planteó la posibilidad de construir las funciones secante y cosecante de la siguiente forma:

Función secante

Se genera la línea trigonométrica de la secante, rama positiva, y se la transfiere al eje Y para luego situarla sobre el punto móvil del dominio de la función. Se halla el lugar geométrico que genera este punto (Figura 69).

Luego encontramos la línea trigonométrica de la secante, rama negativa, de tal manera que el punto sobre la circunferencia se ubique en el segundo o tercer cuadrante donde la función es negativa y se la transfiere al eje Y, para luego situarla sobre el punto móvil del dominio de la función y generar el lugar geométrico (Figura 70)



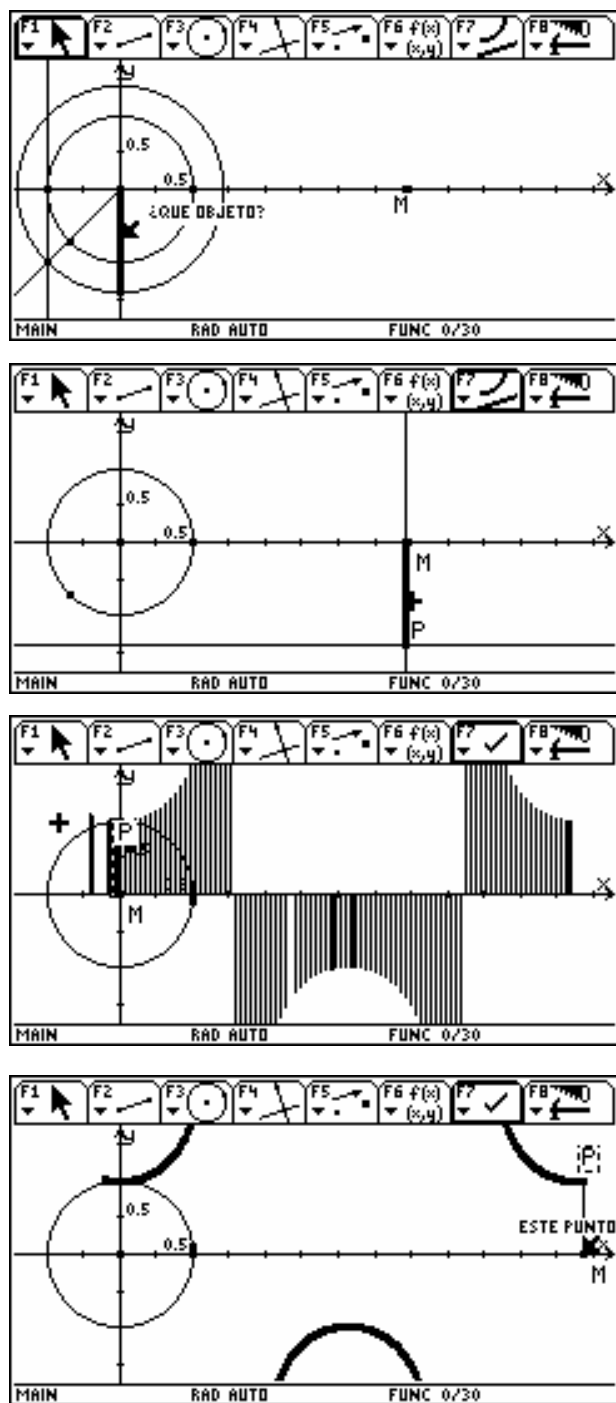


Fig. 70

Función cosecante

Se genera la línea trigonométrica de la cosecante, rama positiva, y se la transfiere al eje

Y, para luego situarla sobre el punto móvil del dominio de la función y hallar el lugar geométrico que genera este punto (Figura 71).

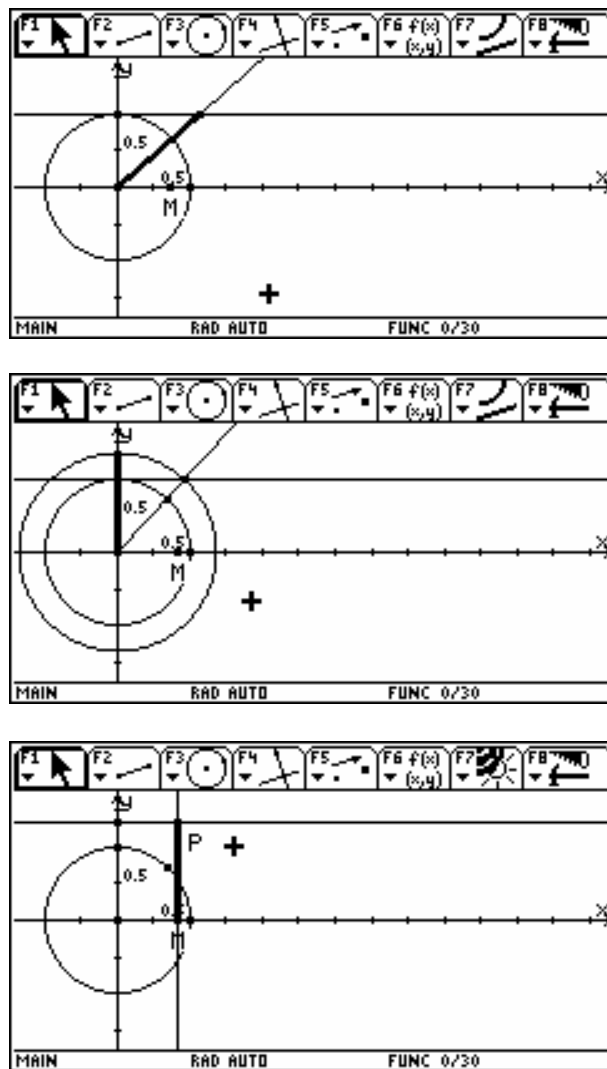


Fig. 71

Después encontramos la línea trigonométrica de la cosecante, rama negativa, de tal manera que el punto sobre la circunferencia se ubique en el tercero o cuarto cuadrante donde la función es negativa. Se la transfiere al eje Y para luego situarla sobre el punto móvil del dominio de la función y generar el lugar geométrico (Figura 72)

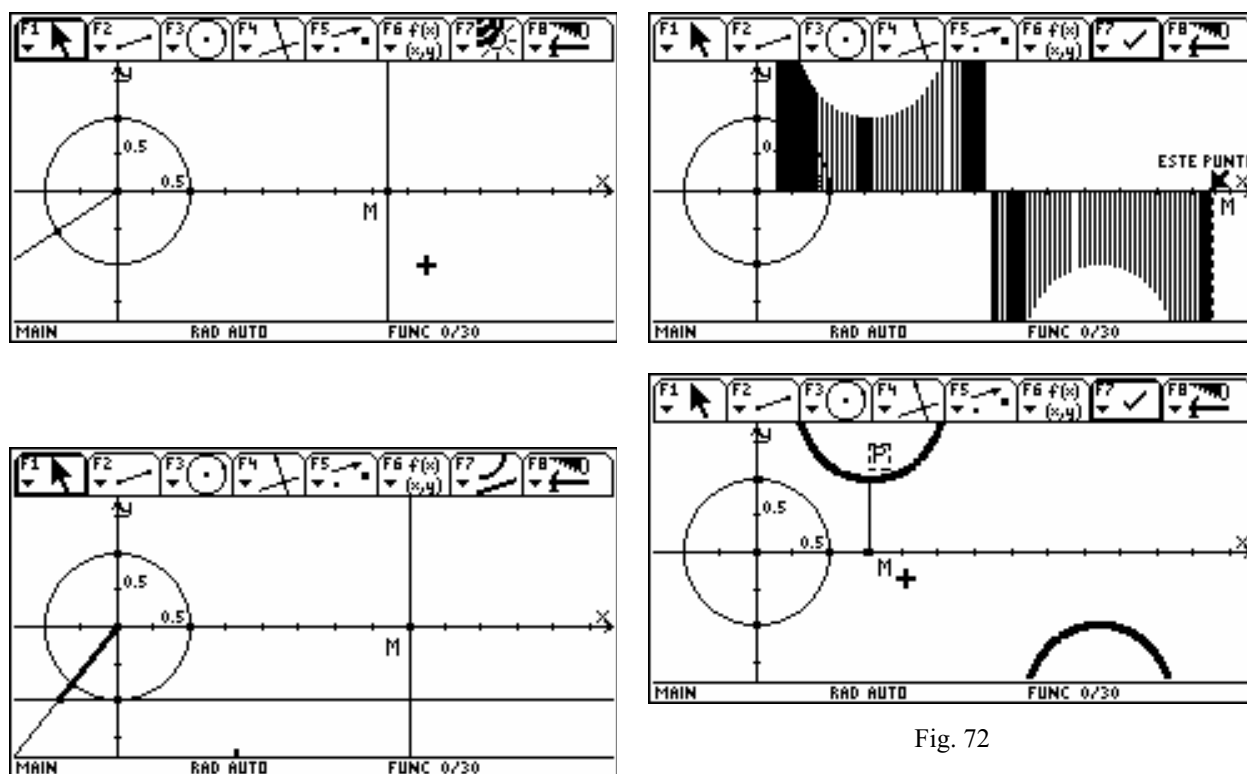


Fig. 72

5.2 Generalización del Teorema de Pitágoras

Profesor: Eugenio Therán Palacio

Institución: Institución Educativa Escuela Normal Superior de Corozal, Sucre.

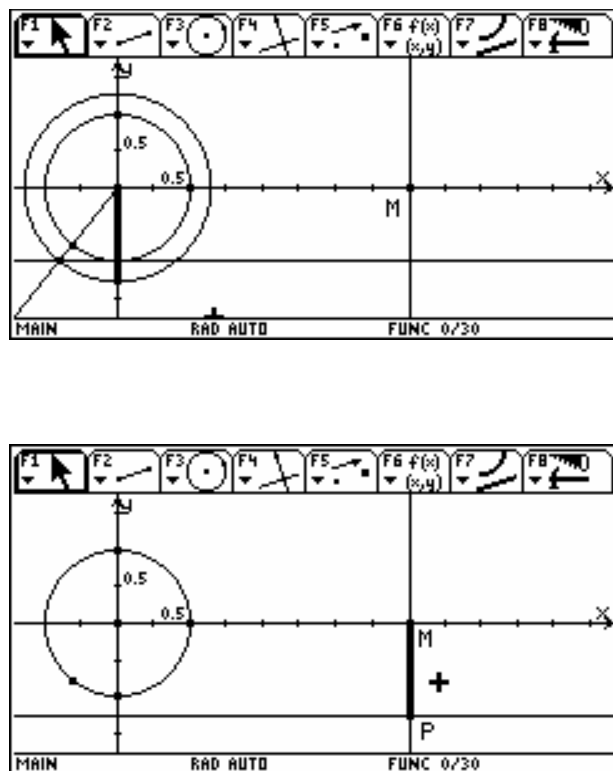
Grado: Décimo

Descripción:

El grupo de estudiantes con los que se trabajó ya tenían conocimientos acerca del manejo técnico de la calculadora y de los principales menús del programa Cabri.

La experiencia se hizo en ocho sesiones de trabajo de dos horas cada una, bajo la modalidad de taller en la que se trabajaron tres fases.

Primera fase: de trabajo individual haciendo el tránsito de la exploración-construcción-producción.



Segunda fase: trabajo grupal, en donde se presentaron acuerdos y argumentaciones para tratar de responder los interrogantes planteados en el taller y

Tercera fase: involucró la circulación del saber construido a través de una puesta en común a nivel general, en la que cada grupo expuso sus conclusiones y recomendaciones, así como las dificultades y avances.

Para el buen desarrollo del taller el grupo debe tener conocimientos básicos en geometría sobre triángulos rectángulos, polígonos regulares, polígonos semejantes; y haber desarrollado algunos temas de funciones lineales y cuadráticas.

Enunciado:

La actividad se inicia presentando una figura como la siguiente (Figura 73), en la que la longitud del segmento AB varía proporcionalmente al segmento RT. Esta será la construcción base para la generalización del Teorema de Pitágoras con distintos polígonos regulares.

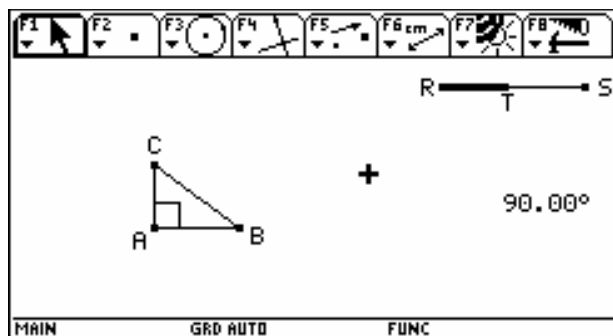


Fig. 73

a) Se plantean los siguientes interrogantes:
¿Qué pasa con el triángulo ABC, cuando se mueve el punto T que está sobre el segmento \overline{RS} ? ¿qué propiedades quedan invariantes en el triángulo ABC, al mover el punto T, sobre el segmento \overline{RS} ?

b) Sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC, construya un cuadrado.
¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados menores?

c) Borre los cuadrados de la figura anterior y sobre el triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A, construya triángulos equiláteros y establezca la relación entre las áreas de los triángulos.
¿Qué sucede con el área del triángulo equilátero mayor y las sumas de las áreas de los triángulos equiláteros menores, cuando movemos el punto T sobre el segmento RS?
¿Qué relación se puede establecer entre las áreas de los triángulos equiláteros?

d) Borre los triángulos equiláteros de la figura anterior y sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, rectángulo en A, construya pentágonos y establezca la relación entre las áreas de los pentágonos.
¿Qué relación se establece entre las áreas de los pentágonos?

e) Borre los pentágonos de la figura anterior y partir del triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A y sobre cada uno de sus lados, catetos e hipotenusa, construya hexágonos.
¿Qué relación existe entre las áreas de estos hexágonos?

f) Borre los hexágonos de la figura anterior y construya sobre cada uno de los lados del triángulo ABC, con ángulo recto en A, semicírculos. Encuentre la relación que existe entre el área del semicírculo mayor y la suma de las áreas de los semicírculos menores. Mueva el punto T sobre el segmento \overline{RS} y escriba sus conclusiones.
¿Qué relación existe entre las áreas del semicírculo mayor y la suma de las áreas de los semicírculos menores?

g) Vuelva a construir cuadrados sobre los lados del triángulo y tabule los valores del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa

y la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños.²

Observando la tabla estudie qué sucede con los valores correspondientes con el área del cuadrado mayor y los valores correspondientes a las sumas de las áreas de los cuadrados menores.

h) Construya la gráfica que relaciona el área del cuadrado mayor con la suma de las áreas de los cuadrados menores.

- *¿Cómo están relacionadas las variables?*
- *¿Podría establecer algebraicamente esta relación?*
- *¿Cuál es la ecuación que relaciona las variables: área del cuadrado mayor y suma de las áreas de los dos cuadrados menores?*
- *¿A partir de esta ecuación que se puede concluir?*

Actividades Complementarias:

Si los alumnos detectan la relación lineal entre el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados menores, pueden formularse preguntas como las siguientes, para ampliar el análisis:

- *¿Cuál es el valor de la pendiente?*
- *¿Cuál es el valor del intercepto con el eje y?*
- *¿Cómo se interpretan estos valores?*

Adicionalmente pueden formularse otras preguntas para ampliar la exploración, como las siguientes:

- *¿Cómo estarán relacionadas las longitudes de la hipotenusa y la longitud del cateto variable?*

- *¿Cómo estarán relacionadas la longitud del cateto variable y el área del cuadrado mayor?*
- *¿Cómo están relacionadas la longitud del cateto variable y la suma de las áreas e los cuadrados pequeños?*
- *¿Es posible que el Teorema de Pitágoras se verifique construyendo polígonos semejantes sobre cada uno de sus lados?*

5.3 Bisectrices e incentro

Profesores: Matilde Velasco Corpus y Jeremías Luna Guerrero

Institución: Liceo Alejandro Humboldt, Popayán, Cauca.

Grado: 7°

Descripción: La propuesta sugiere una exploración de los conceptos de ángulo y bisectriz de un ángulo, así como la detección de la concurrencia de las bisectrices de un triángulo.

Enunciado:

- a) Responder
 - ¿qué es un ángulo?
 - ¿en qué unidades se miden los ángulo?
 - ¿qué es una bisectriz?
- b) Utilizando la calculadora:
 - construir un ángulo
 - determinar su medida
 - trazar su bisectriz
 - Medir los ángulos generados a partir de la bisectriz y estudiar cómo son.
- c) Construir un triángulo y trazar las bisectrices de sus ángulos interiores. Modificar la forma del triángulo a partir del movimiento de uno

² La calculadora permite tabular valores de medidas o cálculos a partir de los objetos geométricos, y presentar estos datos en tablas y gráficas para hacer un tratamiento estadístico.

de sus vértices y estudiar las propiedades de sus bisectrices.

Algunos resultados

Cuando se solicitó a los estudiantes construir y medir ángulos en la calculadora, se observó que hubo buen desempeño en esta acción. Además, consideramos que tienen buen manejo de este concepto pues respondieron en forma acertada la pregunta por el concepto de ángulo. Estas son algunas de las respuestas dadas:

- “Un ángulo son dos semirrectas unidas por un punto”.
- “Un ángulo son dos semirrectas que están unidas por un punto y al ver las semirrectas son infinitas”.
- “Ángulo es una apertura, que se encuentra entre dos líneas unidas por un punto vértice”.
- “Es la abertura que hay entre dos semirrectas que parten de un mismo origen”.

En cuanto al trabajo con bisectrices, una vez construidos los ángulos y trazadas sus bisectrices, la gran mayoría de los estudiantes lanzó hipótesis como:

“Observo un ángulo dividido por bisectrices formando dos ángulos”.

“Observo que con la bisectriz podemos dividir un ángulo en dos ángulos iguales”.

Se les pidió entonces que comprobaran que son congruentes y ellos procedieron a medir los ángulos y hacer afirmaciones como las siguientes:

“Que el ángulo de 90° se ha dividido en partes iguales de 45° y si fuera de otra medida ocurriría la misma división en partes iguales”.

“Que al trazar la bisectriz en el ángulo, éste se dividió en dos partes iguales y al medir estas partes miden igual”.

Consideramos conveniente comentar que dos de los estudiantes realizaron las siguientes afirmaciones:

“La bisectriz entonces es una recta que divide a los dos ángulos interior y exterior en partes iguales”.

“A un ángulo se le pueden trazar infinitas bisectrices, pues cada bisectriz genera otros dos ángulos y así sucesivamente”.

La última afirmación suscitó una controversia pues los demás estudiantes afirmaron que los ángulos sólo tienen una bisectriz y realizaron cada uno su correspondiente construcción para intentar convencer al estudiante.

Se continuó con la actividad en lo referente a la construcción de un triángulo, la construcción de las bisectrices de los ángulos interiores y la modificación del tamaño y forma del triángulo a partir del arrastre de uno de sus vértices, para estudiar regularidades. A la pregunta sobre lo que observan, respondieron de la siguiente manera:

“Observo que las tres bisectrices se interceptan en un mismo punto que se encuentra ahí a pesar de las modificaciones siguen unidas y no se salen del interior del triángulo”.

“El triángulo tiene tres bisectrices que dividen el triángulo en ángulos iguales y siempre se encuentran en un punto de intersección sin tener un cambio”.

“Se observa que por más que se le de cambio al ángulo las bisectrices no cambian su

medida de ángulos y por más que se vuelva pequeño el ángulo las bisectrices siguen dentro del ángulo las tres bisectrices se interceptan en un solo punto”.

Lo anterior nos permite observar que los estudiantes lograron visualizar que las tres bisectrices del triángulo se intersectan en un mismo punto y que ese punto siempre será interior al triángulo, pero al expresar estas propiedades se les dificulta la redacción por el manejo indiscriminado de los términos bisectriz, ángulo, triángulo y vértice.

En cuanto a la conceptualización del incentro que era el objetivo central de la actividad, los estudiantes manifestaron:

“Es el punto por el cual se interceptan tres bisectrices en el interior de un triángulo, ya que el triángulo tiene únicamente tres ángulos. El incentro siempre va dentro en el interior de un triángulo”.

“El incentro es el punto de corte de las bisectrices pero el punto siempre permanece dentro del triángulo así se estire”.

“Con este trabajo comprobamos que el incentro de un triángulo siempre va a ser el punto de intercepción de las bisectrices trazadas sobre los vértices teniendo en cuenta que el incentro nunca va a salir de su triángulo no importa que el triángulo cambie su tamaño”.

Lo anterior nos permite concluir que se llegó al concepto de incentro sin mayor dificultad.

Todo el proceso anterior estuvo apoyado por la calculadora, lo que permitió construir, medir y modificar las diferentes figuras geométricas implicadas en el taller.

5.4 construcción de paralelogramos

Profesores: Nelly Ospina Urquijo y Carlos Vargas Pazmiño

Institución: INEM “Francisco José de Caldas” de Popayán, Cauca

Grado: 6°

Descripción: Se busca que mediante la actividad de construcción los estudiantes reconozcan propiedades fundamentales de los paralelogramos e identifiquen el rectángulo y el cuadrado como tipos especiales de paralelogramos.

La actividad tuvo una duración de 12 períodos de clase, seis bloques de dos períodos cada uno. Cada estudiante trabajó a su propio ritmo y consultó a su profesor las dudas que le iban surgiendo. Al final de cada clase entregó las hojas donde hizo sus anotaciones para que el profesor hiciera un seguimiento de la evolución del trabajo e hiciera las Observaciones que fueran pertinentes. Cada dos clases, el profesor hizo en el view screen las construcciones, para que aquellos estudiantes que tenían dificultades con el manejo de la máquina pudieran observar y sacar conclusiones.

Enunciado:

La actividad tiene como propósito construir figuras que permitan la aplicación de conocimientos geométricos estudiados anteriormente, fomentar la observación y la capacidad para sacar conclusiones. Es necesario seguir las instrucciones que se dan en la guía, observar con atención lo que sucede en la pantalla de la calculadora y escribir las conclusiones en el cuaderno de matemáticas. Esto ayudará a una mejor comprensión.

a) Un cuadrilátero especial.

- Dibuja dos puntos A y B; y traza por ellos la recta AB.

- Construye un punto C, exterior a la recta. Por el punto C traza una paralela a la recta AB.
- Traza la recta BC. ¿Cómo es la recta BC con relación a las rectas paralelas?
- Por el punto A traza una paralela a la recta BC y marca con la letra D el nuevo punto formado.
- Utilizando la función polígono (F3-4), construye el polígono ABCD
- Empleando la función grosor (F7-8) remarca el polígono ABCD. ¿Cuántos lados tiene la figura que construiste?, ¿Qué nombre le darías a esta figura?
- Ahora mueve los puntos A, B y C. ¿Qué sucede con las rectas AB y DC? ¿Cómo son entre si las rectas AD y BC?

¿Puedes sacar alguna conclusión acerca de las características de la figura BCD? Escríbela en tu cuaderno.

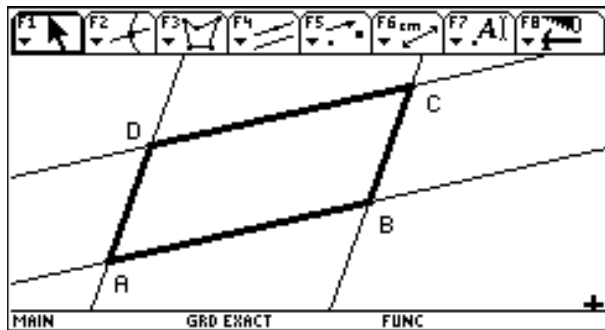


Fig. 74

Un polígono como el del ejercicio anterior recibe el nombre de **PARALELOGRAMO**

- Dibuja, en tu cuaderno, tres paralelogramos en diferentes posiciones. Escribe lo que entiendes por PARALELOGRAMO.
- Borra la figura que construiste en la calculadora (F1-8) y construye un nuevo paralelogramo PQRT.
- Mide la longitud de cada uno de los lados del paralelogramo que acabas de construir (F6-1).
- Mueve los puntos P, Q y R. ¿Se cumplirá esta misma situación en otro cuadrilátero cualquiera?, ¿Qué observas? ¡Compruébalo! Escribe la conclusión obtenida.
- Borra las medidas de los lados. (F8-7). Mide los ángulos PQR, QRT, RTP y TPR.
- Mueve los puntos P; Q y R. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos? ¿Se cumplirá esta misma situación en otro cuadrilátero cualquiera? ¡Compruébalo!
- ¿Puedes sacar alguna conclusión acerca de las medidas de los ángulos internos de un paralelogramo? Escríbela.

b) Un paralelogramo especial

- Borra la figura anterior, traza dos puntos A y B y construye la recta AB que pasa por los puntos A y B.
- Por el punto A traza una perpendicular a la recta. AB. Traza una perpendicular a la recta AB por punto B.
- Mueve los puntos A y B. ¿Cómo son entre si las dos perpendiculares trazadas?
- Construye un punto C sobre una de las perpendiculares y traza una nueva perpendicular por este punto C. Marca con la letra D el punto de intersección.
- Traza el polígono ABCD y remárcalo empleando la opción grosor.

- Mide los ángulos ABC y ADC. Mueve los puntos A; B y C ¿Qué observas?
- ¿Cómo son entre si las rectas AB y DC?
- ¿Cómo son entre si las rectas AD y BC?
- ¿Cómo son entre si las rectas AB y AD?
- ¿Cómo son entre si las rectas DC y BC?
- ¿Encuentras algún parecido entre esta figura y la que construiste en el punto 1? ¿Cuál?
- Se podría afirmar que el polígono ABCD es un paralelogramo? ¿Por qué?
- ¿Cuánto miden los ángulos ABC, BCD, CDA y DAB?
- ¿Qué nombre le darías a esta figura?
- Dibuja en tu cuaderno tres figuras como éstas, en diferentes posiciones.

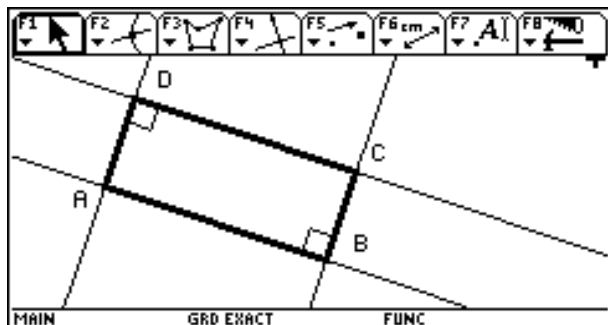


Fig. 75

A un paralelogramo construido con la condiciones con que fue hecho el polígono ABCD, *con ángulos interiores rectos*, se le llama **RECTÁNGULO**

- ¿Cuál es la condición más importante para que exista un rectángulo?

c) Un caso particular de polígono regular

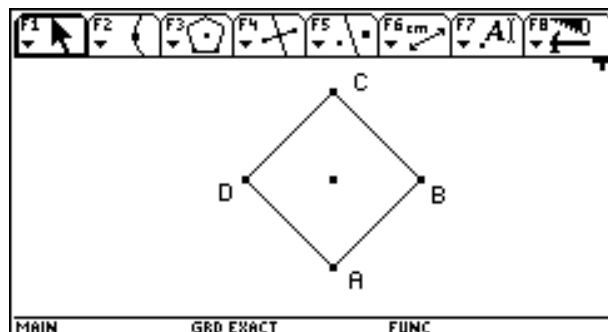


Fig. 76

- Construye un polígono regular de cuatro lados, señálalo con las letras ABCD.
- Mide las longitudes de los lados AB, BC, CD y DE. Mueve el polígono ABCD. ¿Qué observas respecto a las medidas de los lados? ¿Se cumplirá esta misma situación en otro cuadrilátero cualquiera? Compruébalo! Escribe las conclusiones obtenidas
- Mide los ángulos ABC, BCD, CDA y DAB. ¿Cuál es su medida?
- Mueve el polígono ABCD. ¿Qué observas respecto a las medidas de los ángulos? ¿Se cumplirá esta misma situación en otro paralelogramo cualquiera?.
- ¿Cómo se llama un polígono regular de cuatro lados?
- Escribe las conclusiones obtenidas acerca de los lados y ángulos del cuadrado

d) Descubre más propiedades de los paralelogramos

- Construye un paralelogramo cualquiera ABCD
- Traza las diagonales AC y BD.
- Marca el punto de intersección de las diagonales con la letra O.
- Mide la longitud de los segmentos AO, OC, DO y OB.

- Mueve el paralelogramo ABCD. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca de las diagonales de un paralelogramo?
- Construye un rectángulo, traza sus diagonales, mide sus longitudes.
- Mueve el rectángulo. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca de las longitudes de las diagonales de un rectángulo?
- Construye un cuadrado, traza sus diagonales.
- Mide las longitudes de las diagonales.
- Mide los ángulos que tienen como vértice el punto de intersección de las diagonales.
- Mueve el cuadrado. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca de las diagonales de un cuadrado?

5.5 Construcción del Símbolo ying-Yang

Profesores: Helda Sarmiento y Guillermo Valencia

Institución: Colegio de Bachillerato Masculino, Sabanalarga, Atlántico

Grado: Todos los grados de Educación Básica Secundaria

Descripción:

El objetivo de la actividad es aplicar conceptos elementales de geometría como: segmento, punto medio, arco, simetría, circunferencia, radio, diámetro, circunferencias concéntricas y circunferencias tangentes, en la construcción del símbolo del Yin-Yang, mediante el uso del programa Cabri Geometre.

En lugar de dar una secuencia detallada de instrucciones el profesor da libertad a los estudiantes para reproducir el dibujo.



Fig. 77

Enunciado:

Construir el símbolo del Ying- Yang, mediante el uso del programa Cabri Géomètre.

Algunos resultados:

Se comenzó con una puesta en común sobre lo que los alumnos habían consultado sobre el símbolo del Yin – Yang, y todos coincidieron en que venía de una religión china y que el Yin o principio femenino, regula la tierra, la oscuridad, el frío y la humedad. El Yang o principio masculino, regula el cielo, la luz y el calor. Cuando estos principios se combinan, se produce la armonía de la naturaleza. También se pidió a tres estudiantes que dibujaran en el tablero el símbolo y a todos se les hizo la siguiente pregunta: ¿qué elementos geométricos podían ser utilizados para su construcción?, a lo cual todos contestaron que circunferencias.

Luego, con base en los elementos básicos de la geometría ya estudiados, y haciendo uso del programa de Cabri, se les pidió que realizaran una construcción del símbolo del Yin – Yang. Estas son algunas de las construcciones realizadas:

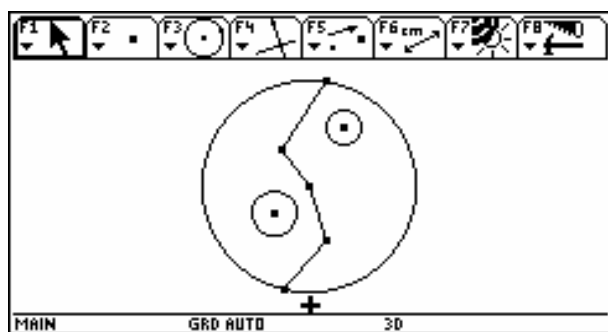


Fig. 78

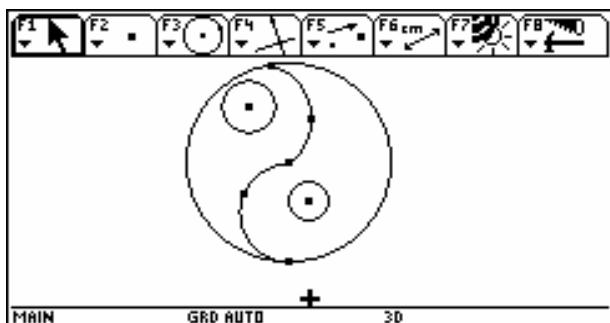


Fig. 79

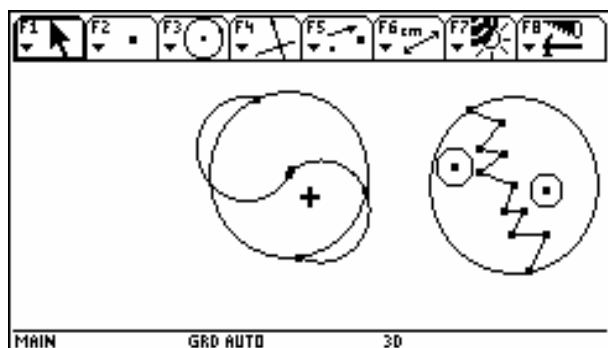


Fig. 80

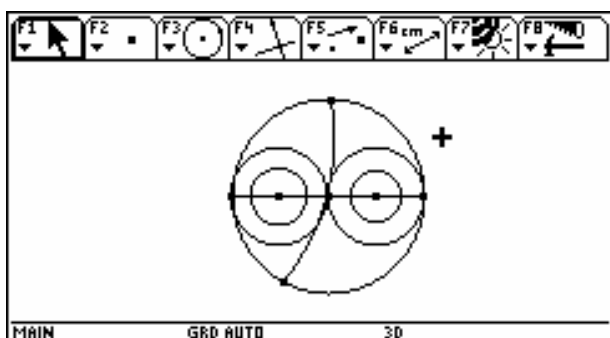


Fig. 81

Algunos estudiantes utilizaron además de la circunferencia varios segmentos (ver figura 78), otros utilizaron una circunferencia y un arco (ver figura 79), una circunferencia y dos arcos (ver figura 80), y cinco circunferencias, de las cuales dos pares son concéntricas, y dos segmentos (ver figura 81).

A los estudiantes que hicieron la figura 78 se les dijo que arrastraran uno de los extremos del arco y que contaran qué sucedía, después de hacerlo, ellos respondieron “se daña el símbolo, porque el arco se deforma”.

A los estudiantes que hicieron la figura 79 se les solicitó hacer lo mismo y contestaron: “al arrastrar, los arcos se salían de la circunferencia y se perdía la figura del símbolo”.

A los estudiantes que trabajaron con la figura 80 se les pidió explicar qué intentaban hacer con esa construcción y ellos respondieron: “estamos tratando que los ojitos (el centro de cada circunferencia) del símbolo quedaran en la misma dirección y a la misma distancia”

Por último el estudiante que estudió la figura 81 dijo que había hecho esta construcción “porque se veían mejor los ojitos del símbolo y al darle animación a uno de los extremos del segmento las circunferencias pequeñas no se salían de la mayor y se conserva la construcción”. Los compañeros que habían trabajado con arcos, le sugirieron que trazara arcos en la parte inferior de la circunferencia mayor y entre las dos circunferencias tangentes, de tal forma, que al ocultar éstas circunferencias y darle grosor a los arcos se visualizara el símbolo del Yin –Yang (figura 82).

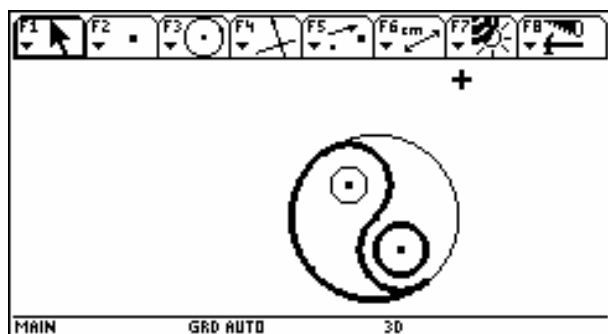


Figura 82

De esta forma se llegó a la construcción. Durante este desarrollo los estudiantes demostraron tener claro los elementos básicos de la geometría antes estudiados, ya que los argumentos utilizados para explicar cada paso que hacían eran válidos y muy bien fundamentados. Además tuvieron la capacidad de proponer al compañero de la *figura 90* la forma de terminar su construcción.

5.6 Construcción del rectángulo

Profesor: Mario Cardona Castaño

Institución: Escuela Normal Superior del Quindío, Armenia, Quindío.

Descripción:

La propuesta pretende aprovechar la actividad de construcción para lograr la conceptualización del rectángulo como una figura geométrica.

Enunciado:

Construir un rectángulo, usando las herramientas de Cabri, que conserve sus características al ser sometido al arrastre.

Algunos resultados:

a) Acciones previas

En los cursos anteriores, los alumnos ya habían incursionado de manera exploratoria en el uso de Cabri, pero habían trabajado muy poco los contenidos de geometría que tradicionalmente hacen parte del currículo. El trabajo previo en Cabri les permitió familiarizarse rápidamente con el entorno, especialmente con las herramientas de construcción y con las herramientas de medida.

En una exploración acerca del conocimiento que los estudiantes tenían sobre las diferentes clases de cuadriláteros, se reflejó gran deficiencia, tanto en el reconocimiento perceptivo e identificación de cada uno de ellos, como en la comunicación escrita de procedimientos. Fue necesario realizar unas acciones previas, con el fin de garantizar que los estudiantes conocieran los elementos para abordar las actividades de construcción en Cabri, tales como la identificación de las diversas clases de cuadriláteros, las nociones de paralelismo y perpendicularidad, el seguimiento de instrucciones y la comunicación escrita de los procedimientos de construcción empleados

b) La construcción del rectángulo en el entorno Cabri

Se consideró importante conocer inicialmente las estrategias que los estudiantes empleaban para trazar rectángulos valiéndose de lápiz y papel y de herramientas de dibujo.

La mayoría de los alumnos trazó los rectángulos usando rectas horizontales y verticales sin hacerlo explícito al comunicar los procedimientos e hizo énfasis en dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales. Por esto estaban seguros de que es un rectángulo. Utilizaron escuadras y reglas para trazar segmentos y en algunos casos para medir. No utilizaron el compás, ni la escuadra para trazar perpendiculares. La construcción en la mayoría de los casos no fue exacta: se hizo de manera aproximada, “a ojo”. Unos pocos estu-

diantes relacionaron el rectángulo con ángulos rectos o con ángulos de 90°.

Cuando se intentó construir el rectángulo, haciendo uso del software de geometría dinámica Cabri, con la única condición de que sus componentes pudieran ser sometidos a estiramientos, giros y desplazamiento y que siguiera siendo rectángulo, entonces se trasladaron las estrategias de construcción con lápiz y papel al ambiente Cabri. Veámoslo a continuación.

c) Primeros ensayos: Predominio del dibujo

El problema de construir un rectángulo, usando herramientas de Cabri, que conserve sus características al ser sometido al arrastre, parece inicialmente un ejercicio sencillo para los estudiantes. Hacen el primer rectángulo, siguiendo una estrategia similar a la que emplean con lápiz y papel. En este intento, la configuración de la pantalla ayuda a reconocer líneas verticales y horizontales (Figura 83).

Trazan un segmento horizontal.
 Trazan segmentos verticales a partir de los extremos del segmento inicial .
 Trazan un segmento horizontal por los extremos de los segmentos verticales.
 extremos libres de los segmentos verticales.

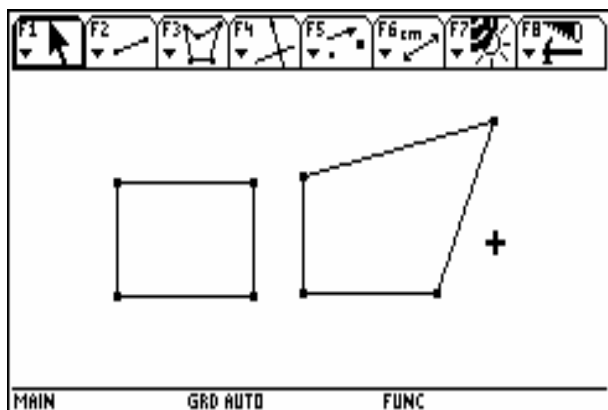


Fig. 83

Por esta razón, en el primer intento, pocos estudiantes hacen uso del paralelismo y la perpendicularidad, así hayan empleado estas herramientas previamente y tengan alguna familiaridad con dichas relaciones. Pronto encuentran que esta construcción no resiste el desplazamiento, o giro de uno o varios de sus componentes y descubren que mediante estos tanteos no es posible hacer la construcción pedida.

Empiezan la búsqueda de soluciones, se ensayan diversas alternativas que son sometidas a prueba, se incluye el uso de la opción polígono y/o de rectas horizontales y verticales trazadas por ensayo y error. Aquí la intervención del docente es mínima: es el propio alumno quien con la ayuda de la calculadora somete a prueba su construcción y cuando está convencido de su solución, desafía al docente a desbaratar su construcción. Se logran construcciones que conservan sus características al ser desplazados algunos de los puntos libres de la construcción y esto genera emoción.

d) Un dibujo particular

La construcción que se presenta a continuación es muy particular, pues parece cumplir las condiciones establecidas.

Trace una semirrecta horizontal a partir de A

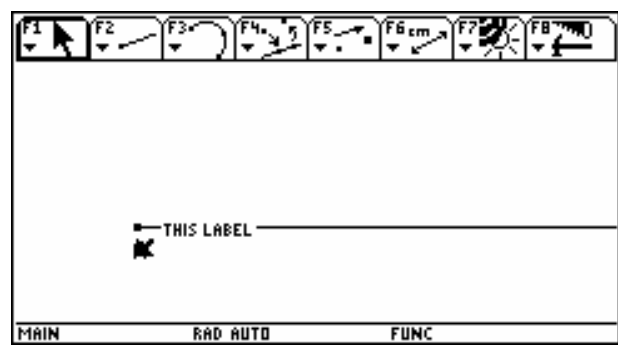


Fig. 84

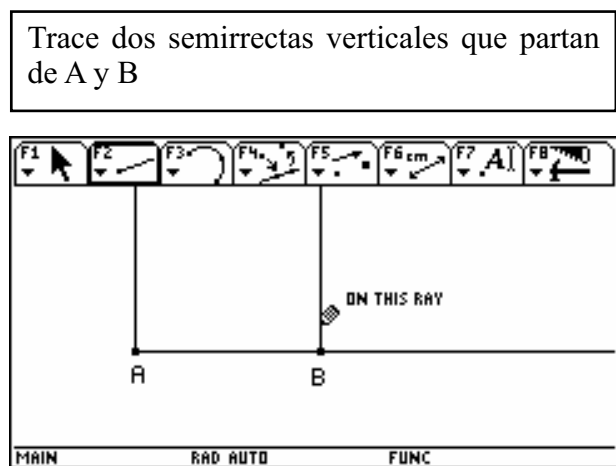


Fig. 85

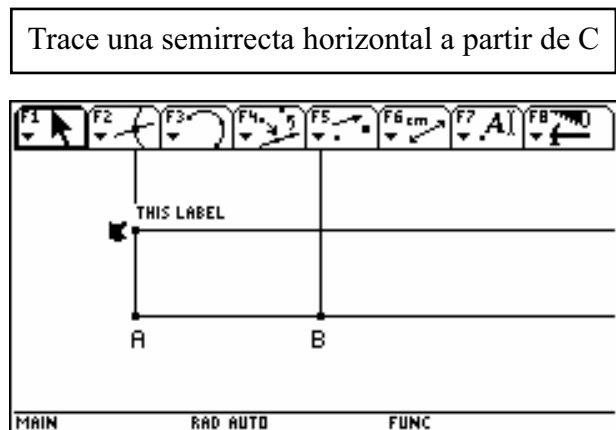


Fig. 86

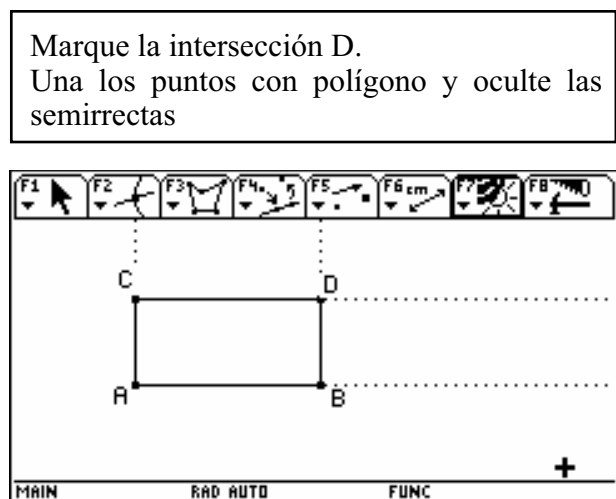


Fig. 87

Se obtiene un rectángulo que puede ser trasladado moviendo el punto A. Se pueden también desplazar los puntos B y C. Esto permite alargar o ensanchar el rectángulo modificando una de sus dimensiones, conservando las propiedades que lo caracterizan. Pero el uso de las opciones de desplazamiento (arrastre) de los componentes del rectángulo no permite girarlo.

Esta construcción, realizada por ensayo y error, no obliga al alumno a hacer explícita la relación de perpendicularidad entre lados contiguos. Varios alumnos ensayaron soluciones similares.

Finalmente, se acepta la propuesta, sin someter a prueba la construcción base, pero se les pide que traten de hacer la construcción de tal manera que el rectángulo se pueda girar sin que pierda su condición de rectángulo.

e) Aproximaciones a la solución del problema. Paso al objeto geométrico.

Los esfuerzos iniciales orientaron a los alumnos a intuir que las construcciones eran defectuosas o se “desbarataban”, no porque se separaran las líneas, sino porque las “esquinas” se deformaban. En nuestro medio, la mayoría de las esquinas están formadas por paredes perpendiculares entre sí. Empezaron intuitivamente a reconocer la importancia de los ángulos rectos en la construcción del rectángulo y rápidamente se hizo uso de perpendiculares y paralelas. Los estudiantes propusieron las siguientes soluciones:

Primera solución:

- Trace una recta.
- Trace una recta paralela a la recta inicial.
- Trace rectas perpendiculares a la recta inicial
- Marque los puntos de intersección de las rectas trazadas.
- Oculte las rectas y una los puntos con segmentos o polígono

La mayoría explicó que el objeto construido era un rectángulo porque tenía ángulos de 90° o ángulos rectos. Además, algunos enfatizaron que tenía dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales. En esta etapa aún no hacían explícita en sus explicaciones el uso de las rectas perpendiculares y su relación con los ángulos rectos. El comportamiento final de la construcción varía, según si se traza una de las perpendiculares por el punto base usado para construir la primera recta. En este caso, el comportamiento es similar al de la construcción anterior, pero en cualquier caso no es posible girar el rectángulo. Una diferencia clave con el procedimiento reseñado en el apartado anterior, es la construcción base. La primera no resiste desplazamientos, esta última sí. Los puntos siguen siendo los vértices de un rectángulo.

Los estudiantes rápidamente establecieron que si la construcción parte de un segmento se podrá girar el rectángulo, trasladarlo y ampliarlo o reducirlo.

Segunda solución:

Un rectángulo que se puede girar, trasladar y modificar su tamaño

Trace un segmento.

Trace rectas perpendiculares al segmento por sus puntos extremos

Trace una recta perpendicular a una de las perpendiculares trazadas anteriormente.

Marque los puntos de intersección de las rectas trazadas.

Oculte las rectas y una los puntos con segmentos.

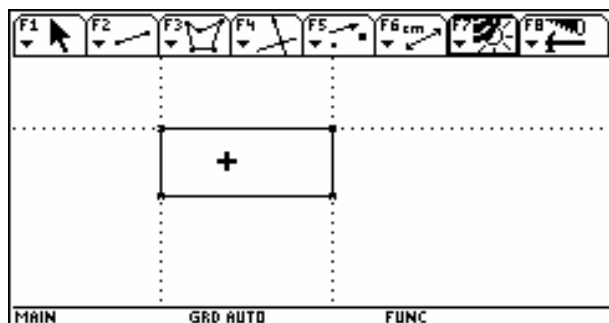


Fig. 88. Construcción inicial

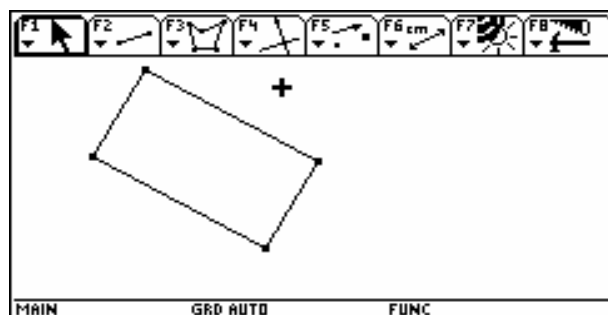


Fig. 89. Construcción modificada

Ya en este momento del trabajo los alumnos reconocen que el objeto construido es un rectángulo porque tiene los ángulos rectos o de 90° , algunos incluso los miden.

En la puesta en común y ante la pregunta por qué esos ángulos siempre son rectos, o de 90° , se reconoce su relación con rectas perpendiculares, ya que las rectas perpendiculares forman ángulos rectos. La gran mayoría empieza a abandonar la idea de un rectángulo como un objeto de dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales.

Finalmente los alumnos establecen que hay diferentes formas de construir un rectángulo en el entorno Cabri, aunque la mayoría de las propuestas usaron segmentos y rectas perpendiculares, se hizo poco uso de las rectas paralelas.

En esta etapa del proceso los alumnos señalan que un rectángulo es:

- Un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.*
- Una figura de cuatro lados con ángulos de 90° .*
- Un cuadrilátero con lados contiguos perpendiculares.*

Y adicionalmente reconocen que los lados opuestos son paralelos y de igual medida.

f) Una nueva solución: Un rectángulo inscrito.

Algunos estudiantes tratan de construir un rectángulo a partir de una circunferencia usando la opción polígono regular, pero abandonan la idea, dado que resulta un cuadrado, aunque reconocen en él ángulos rectos. La idea de lados largos iguales y de lados cortos iguales aun está presente.

Luego ante el comentario de uno de los profesores según el cual él tenía una construcción de un rectángulo a partir de una circunferencia, los estudiantes retoman esta alternativa y proponen algunas construcciones.

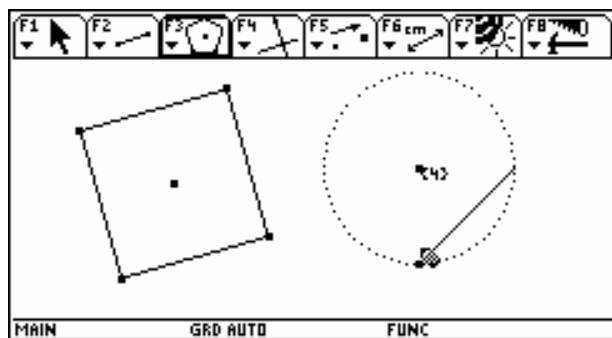


Fig. 90. Opción polígono regular y construcción de un cuadrado

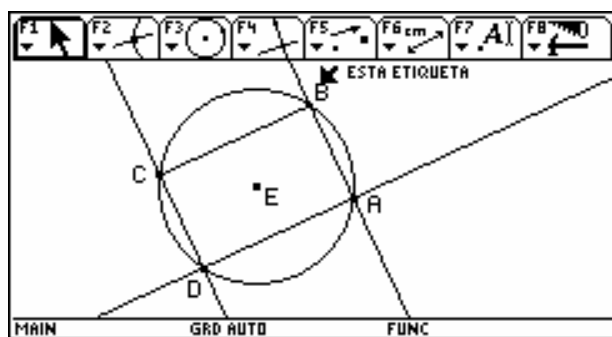


Fig. 91. Construcción de un rectángulo inscrito

Los estudiantes exploran la construcción y encuentran que los vértices del rectángulo siempre están sobre la circunferencia, aparece la idea de rectángulo inscrito y además se justi-

fica que la construcción da lugar a un rectángulo porque los cuatro ángulos son rectos. De manera muy intuitiva, algunos alumnos argumentan que el cuarto ángulo, CDA, que aparece al hacer la construcción, es recto porque está formado por rectas perpendiculares, otros lo miden y les da 90° .

Al trazar la diagonal encuentran que ésta pasa por el centro de la circunferencia; la diagonal es diámetro de la misma.

Actividades complementarias

a) Generación de nuevos interrogantes.

Esta construcción generó los siguientes interrogantes:

- ¿Qué pasa si se traza un ángulo con vértice sobre la circunferencia y cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro de la misma?

Esta pregunta llevó a la idea de ángulo inscrito y en particular que en este caso estamos ante un ángulo recto. Esto confirma que la construcción propuesta arriba es un rectángulo. Sus cuatro ángulos tienen vértice sobre la circunferencia y los lados de cada uno de ellos pasan por los extremos de un diámetro de la circunferencia.

- ¿Qué significa que un punto sea centro de un rectángulo?

Esta pregunta llevó a la idea de centro de simetría del rectángulo.

Finalmente se concluyó en la puesta en común que un rectángulo también es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y cuyas diagonales son diámetros de la circunferencia.

En actividades posteriores se revisaron otras opciones de construcción y se hicieron nuevas propuestas. Esta experiencia permitió avanzar en la construcción de cuadrados y rombos, con varias propuestas válidas en cada caso y con poca inversión de tiempo.

b) Afianzando el concepto de rectángulo. De regreso a las perpendiculares y paralelas.

Luego de abordar diferentes alternativas para la construcción de cuadrados y rombos los estudiantes trabajaron la siguiente situación:

Utilizando segmentos y únicamente perpendiculares o únicamente rectas paralelas construir si es posible, un rectángulo, un rombo y un cuadrado.

Después de varios intentos, se presentan las primeras propuestas, algunas de ellas fallaron, y finalmente los estudiantes sacan las siguientes conclusiones:

- Si trazamos un cuadrilátero usando rectas perpendiculares, este será siempre un rectángulo.
- Si trazamos un rectángulo usando rectas paralelas, debemos usar al menos un par de rectas perpendiculares.
- El rectángulo es un paralelogramo con ángulos rectos.

c) Relacionando el rectángulo con sus componentes.

Cuando se construyeron los diversos paralelogramos, se establecieron algunos conceptos sobre cada uno de ellos y se caracterizaron sus elementos. Con respecto al rectángulo los alumnos señalaron:

- Los lados opuestos de un rectángulo son paralelos y de igual medida.
- Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio y son de igual medida.
- Los lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares entre sí.
- En un rectángulo los ángulos tienen igual medida.
- La mediatriz de un lado del rectángulo es mediatriz del lado opuesto.
- Las mediatrices de un rectángulo son perpendiculares entre sí.
- Las mediatrices se intersecan en el centro del rectángulo.
- Las mediatrices determinan cuatro rectángulos de igual tamaño.

Como se observa en las tres últimas conclusiones, en el proceso de exploración los estudiantes avanzan hasta encontrar regularidades que con lápiz y papel no lo hubieran hecho.

Sobre las bisectrices de los ángulos del rectángulo se obtienen conclusiones que se pueden entender mejor si se verifican usando un software de geometría dinámica. Al respecto, los alumnos encontraron:

- Las bisectrices de los ángulos consecutivos de un rectángulo son perpendiculares entre sí.
- Las bisectrices de los ángulos opuestos de un rectángulo son paralelas entre sí.
- Las intersecciones de las bisectrices de un rectángulo, determinan un cuadrado.

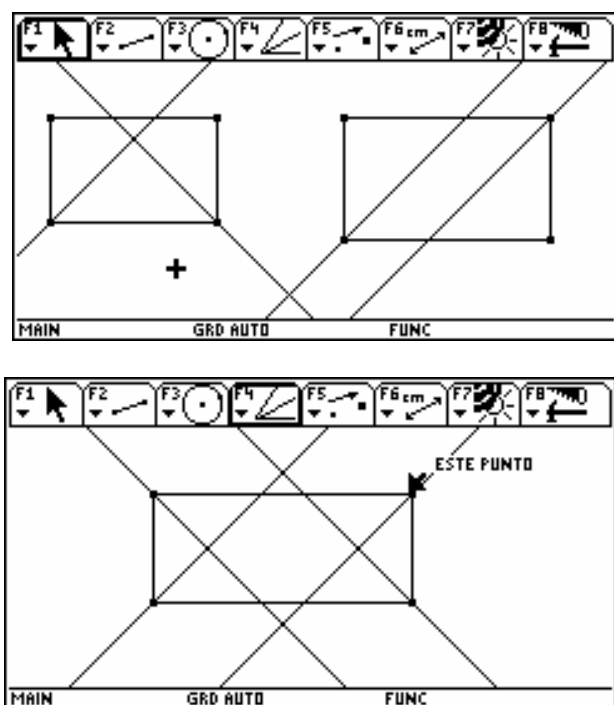


Fig. 92

Algunos estudiantes empiezan a preguntar cómo es posible justificar las anteriores conclusiones sin ayuda de la calculadora. Se empiezan a interesar por la prueba.

Observaciones y conclusiones

- Ante el problema de construir un rectángulo que conserve sus características al desplazar alguno de sus componentes, la estrategia inicial de ensayo y error asociada a las ideas iniciales que poseen los alumnos, se ve facilitada por la amigabilidad del software y la resolución de la pantalla. Pero es ese mismo software quien invalida estas estrategias de ensayo y error o de construcciones a ojo. Esto no sería posible con lápiz y papel. El software permite hacer, modificar y rehacer rápidamente las construcciones.
- En el proceso de exploración inicial, se encontró que existen diferentes formas

de construir rectángulos e igualmente se establecieron relaciones entre el rectángulo y sus elementos y entre los elementos mismos: lados consecutivos perpendiculares, lados opuestos de igual tamaño y paralelos. Incluso se establecieron unas primeras relaciones de manera muy informal con los paralelogramos y los cuadrados, las cuales fueron abordadas en sesiones posteriores.

- Las estrategias exitosas, en la mayoría de los casos, se asociaron con una discriminación inicial de algunas de las características del rectángulo, básicamente de los ángulos rectos (esquinas) y su relación con las rectas perpendiculares.
- La consolidación del concepto de rectángulo se vio favorecida al construir los demás paralelogramos. Esto no sólo afianzó la caracterización inicial, sino permitió establecer relaciones entre sus elementos.
- Los estudiantes que asistieron regularmente a las clases, avanzaron de una percepción inicial del rectángulo como una totalidad, a su caracterización y establecimiento de relaciones entre sus elementos (relaciones interfigurales), hasta el establecimiento de relaciones con otros cuadriláteros (relaciones interfigurales) e incluso algunos empiezan abordar las pruebas informales.
- La puesta en común resultó de vital importancia para poner de manifiesto las dificultades presentadas, confrontar diferentes puntos de vista y someter a análisis diferentes alternativas. Esto favoreció a los alumnos rezagados, quienes recibieron una retroalimentación oportuna, poniendo a prueba con ayuda de la calculadora, sus propuestas y las de sus compañeros.

- La comunicación de procedimientos y resultados por parte de los estudiantes, evidenció avances ya que en el ámbito del aula de clase, el alumno es motivado a comunicar a otros los procedimientos y los resultados obtenidos. Algunos llevan notas personales a pesar de que no se exige y normalmente se recogen algunas producciones escritas al finalizar cada sesión.
- El empleo del software permite realizar un diseño de actividades orientadas hacia la exploración, predicción, establecimiento de invariantes y verificación de propiedades y relaciones entre los elementos de los objetos geométricos, destacando los aspectos que son relevantes de los que no lo son.

5.7 Construcción de un Triángulo equilátero

Profesor: Fernando Angulo Díaz
Institución: Institución Educativa Manuel María Mallarino
Grado : Noveno

Asesoría y acompañamiento:

Profesor Diego Garzón. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Descripción:

Se intenta generar un ambiente de situación problema en el que la actividad central es la búsqueda de una estrategia de construcción.

Enunciado:

Se tienen tres circunferencias concéntricas. Construir un triángulo equilátero, de modo que cada vértice esté sobre una de las circunferencias.

Aspectos del diseño de la Actividad:

Esta actividad se divide en tres partes: la primera, en la que trabajan los grupos de estudiantes en la exploración y comprensión del enunciado de la situación problema propuesta (términos desconocidos, datos explícitos y condiciones del problema). Una vez los diferentes grupos tienen la suficiente claridad sobre el problema a resolver, empiezan a trabajar en alguna estrategia de solución, preferiblemente sin intervención del docente.

Luego de esta primera parte, la actividad se centra en el uso de la calculadora, donde los estudiantes tienen la posibilidad de explorar una gama de posibilidades que ofrece las herramientas del programa Cabri. Una vez que han realizado sus respectivas construcciones, tratan de poner en evidencia las propiedades geométricas en juego y las relaciones entre distintos elementos u objetos geométricos. En esta segunda parte, el trabajo del docente se centra en detectar qué herramientas son las que más utilizan los estudiantes, qué fortalezas y/o dificultades comienzan a presentarse, si hay problemas de manejo de la calculadora, sobre la implementación de estrategias poco eficientes, si hay obstáculos que impiden la puesta en escena de una de las fases de la estrategia trazada o si se presenta un uso adecuado o nulo de los conceptos o procedimientos previos pertinentes (el uso de macros y lugar geométrico).

Sin descalificar el trabajo de los distintos grupos, se hace indispensable el buen manejo de las preguntas por parte del docente, el ponderar fortalezas o hacer caer en la cuenta de incoherencias, baches en las construcciones que han realizado y en las inferencias o resultados obtenidos por los estudiantes.

En esta parte del trabajo es fundamental que los estudiantes le saquen el máximo provecho

al dinamismo del ambiente Cabri, que implementen las consignas que enmarcan la exploración de una figura o construcción (dudar de lo que se ve, ver más de lo que se ve, enriquecer la figura y explicar las relaciones encontradas). Para esta actividad es vital el uso de macros, que facilitan y agilizan el trabajo (macro para construir un triángulo equilátero a través de los puntos iniciales y la macro para construir una circunferencia a través de tres puntos) y el arrastre de puntos libres que permiten visualizar el lugar geométrico de un punto al “materializar” la trayectoria de otro punto determinado.

Una vez se tengan avances significativos o resultados consolidados por parte de algunos grupos, se pasa a la tercera parte, que corresponde a la socialización del trabajo. Se presenta la solución que se halló enfatizando en la estrategia que se utilizó, en los obstáculos que se encontraron y en la forma como se superaron. Finalmente se presenta la secuencia organizada de las construcciones básicas y auxiliares, necesarias para solucionar eficazmente el problema. En esta puesta en común se realizan los aportes del grupo y se hacen los ajustes pertinentes.

Para cada actividad o problema propuesto en clase, cada grupo debe crear un archivo donde quedan grabadas las construcciones realizadas y los respectivos resultados obtenidos, además deben entregar un registro por escrito donde aparecen los siguientes puntos:

- Interpretación del problema.
- Exploraciones preliminares y/o bosquejo de la estrategia a implementar.
- Aspectos relevantes durante el desarrollo de la actividad.
- Presentación de la solución obtenida. En el caso de problemas de exploración geométrica, debe presentarse, además de la respectiva construcción, la secuencia de los pasos de la misma.

Algunos resultados:

En su mayoría, los alumnos de grado noveno, que participaron en esta experiencia, trabajaron el año anterior con las calculadoras. En las clases se habían trabajado dos problemas afines: el primero era el de inscribir un triángulo equilátero en dos triángulos acutángulos, uno equilátero y el otro isósceles; y el segundo consistía en inscribir un cuadrado en un triángulo equilátero. Ambas actividades fueron propuestas para abordar la estrategia de debilitar las condiciones del problema, que consiste en satisfacer algunas condiciones del problema inicial para luego arrastrar uno de los puntos que cumplan tal condición y observar qué ocurre con el punto que no lo cumple, verificar la conjetura con el uso del lugar geométrico y luego con alguna construcción auxiliar determinar la intersección de dicho lugar geométrico con el objeto geométrico pertinente para poder solucionar el problema en cuestión.

Después de un par de minutos, en los cuales cada subgrupo leyó el enunciado de la situación, la comentaron y analizaron. Se hizo un sondeo rápido para verificar si el problema estaba lo suficientemente claro o si era necesario realizar algunas precisiones individuales o en grupo. Se constató que en general el problema fue claramente comprendido.

Cada subgrupo comenzó a explorar el problema. Más o menos el 30% parte de la estrategia de ver el problema resuelto, para ello primero construyeron un triángulo equilátero y luego, marcando un punto O, construyeron las tres circunferencias concéntricas, de tal manera que los vértices del triángulo tengan sus vértices sobre las tres circunferencias respectivamente. En esta exploración inicial observaron que hay dos circunferencias con radios de medidas cercanas y una con un radio más pequeño, arrastraron uno de los puntos iniciales y modificaron el tamaño

del triángulo a la vez que se modificaban los respectivos radios de las circunferencias.

Los otros grupos, más o menos el 70%, comenzaron a abordar directamente el problema, trazando las tres circunferencias concéntricas; de ese porcentaje solo aproximadamente la cuarta parte les trazó en primera instancia, los respectivos radios y unas cuantas parejas además de trazarlos también les calcularon sus respectivas medidas.

Una vez trazadas las tres circunferencias, C1, C2 y C3; C1 la de radio menor, C2 con radio medio y C3 la de radio mayor; la mayoría de los grupos pusieron en práctica la estrategia de debilitar el problema. Trazaron un segmento AB, A sobre C3 y B sobre C2, y emplearon una macro para construir un triángulo equilátero a partir de A y B como objetos iniciales. El vértice C, en un alto porcentaje, parecía no pertenecer a C1. Arrastraron el punto B alrededor de C2, quedando inmóvil el punto A y gracias a la visualización que ofrece el ambiente al arrastrar puntos libres observaron que el lugar geométrico que describía el punto C, parecía una circunferencia. Tal conjetura tomó fuerza al marcar la traza que dejaba el punto C. Luego emplearon la herramienta de lugar geométrico y corroboraron que dicha circunferencia se intersectaba con C en dos puntos, en consecuencia habría dos soluciones distintas.

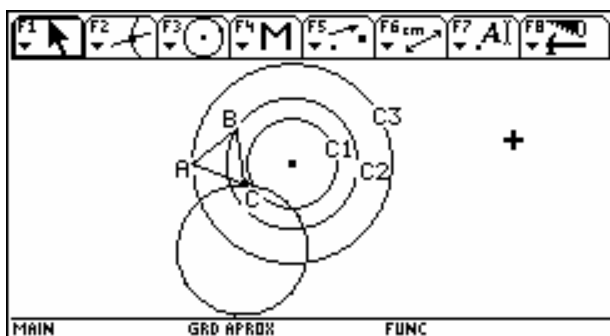


Fig. 93

Al intentar determinar los puntos de intersección del lugar geométrico y C1, estos no podían ser determinados, luego era necesario reconstruir dicho lugar geométrico con alguna construcción auxiliar. Varias parejas recordaron que una circunferencia queda determinada por tres puntos. Por lo tanto, trazaron tres triángulos equiláteros, dejando el punto A fijo y variando el punto B para obtener los tres triángulos equiláteros ABC, AB'C' y AB''C'', donde C, C' y C'' debían pertenecer al lugar geométrico encontrado. Solo cuatro parejas en lugar de arrastrar el punto B lo hicieron con el punto A, dejando inmóvil a B y hallaron el lugar geométrico del tercer vértice C, dándoles dicho lugar geométrico distinto a los demás grupos pero igual de válido para solucionar el problema.

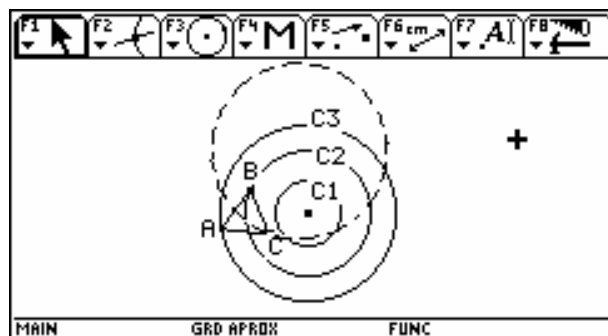


Fig. 94

Conociendo C, C' y C'', y utilizando una macro (dados tres puntos iniciales se construye la circunferencia que pasa por ellos) trazaron la circunferencia C4 correspondiente al lugar geométrico en cuestión y pudieron encontrar los dos puntos de intersección de C4 y C1 (P y P'). Cuatro parejas se percataron de que C4 parecía de igual tamaño a C2, midieron los respectivos radios y verificaron tal conjetura.

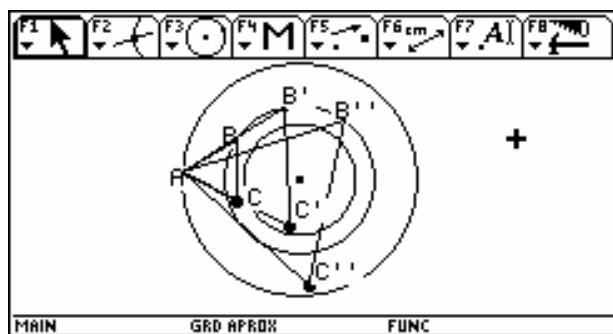


Fig. 95

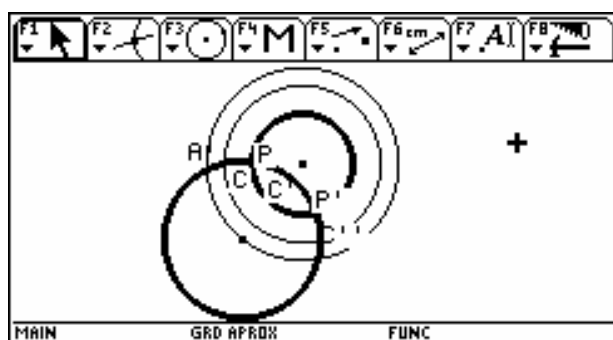


Fig. 96

Tomando A, P y A, P' como objetos iniciales respectivamente (A C3 ,P y P' C1) y empleando la macro para trazar triángulos equiláteros, construyeron los triángulos APB y AP'B, con B y B' pertenecientes a C2 (lo verificaron empleando la herramienta “comprobar propiedad” –está sobre el objeto”). Con lo anterior el problema estaba solucionado correctamente.

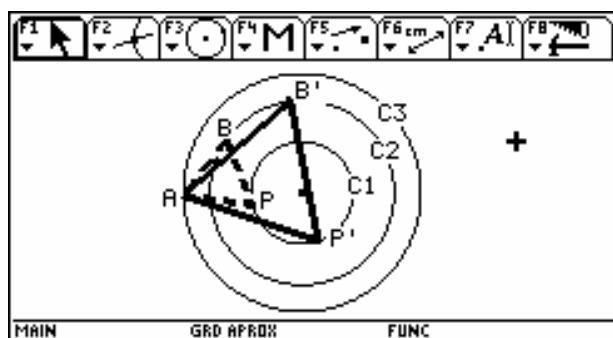


Fig. 97

Por otro lado, cabe resaltar que cuatro parejas habían tenido dificultad desde el comienzo de la actividad porque al trazar las tres circunferencias concéntricas, al construir un triángulo equilátero con dos vértices sobre dos circunferencias respectivamente y al emplear lugar geométrico notaron que éste no se intersectaba con la tercera circunferencia y por tanto el triángulo equilátero pedido en el problema no podría ser construido. Se les pidió modificar el radio de esa tercera circunferencia para que pudiera darse la intersección con el lugar geométrico y se recomendó analizar posteriormente, con todo el grupo, ese caso en particular. Una vez que la mayoría de los grupos había terminado sus construcciones y hallado dos soluciones distintas al problema, se realizó la tercera fase del trabajo. Una pareja voluntaria se ofreció a exponer a todo el curso la resolución del problema. Una vez terminada dicha socialización se les planteó que indagaran y sustentaran cuándo el problema propuesto carecía de solución y si era posible que tuviera solución única.

Cada pareja retomó la construcción que había realizado y comenzó a ampliar y reducir el tamaño de las circunferencias. Algunas parejas se percataron que la cuestión radicaba en una relación que debía existir entre los radios de las mismas, trazaron y midieron los respectivos radios de C1 , C2 ,C3 (R1 , R2 y R3). Hubo dos parejas que vislumbraron la respuesta correcta, notaron que cuando la suma de R y R2 era menor que R3, el problema carecía de respuesta y que cuando $R1+R2$ era mayor que R3, el problema presentaba dos soluciones distintas, deduciendo que cuando $R1+R2 = R3$ debería presentarse solución única. Después de varios intentos infructuosos de lograr dicha solución, mediante la ampliación y reducción de los radios, optaron por construir las tres circunferencias concéntricas con tales condiciones específicas ($R1+R2 = R3$) y lograron verificar su hipótesis.

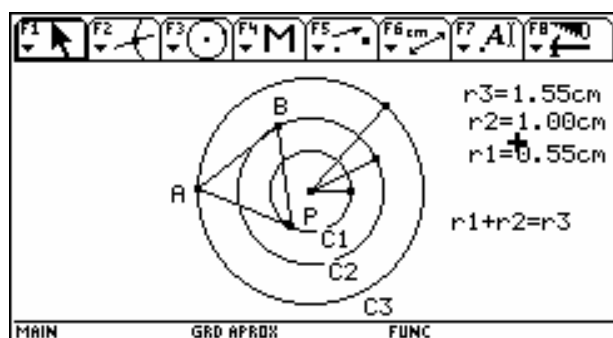


Fig. 98

Para el caso en el que el problema carece de solución simplemente trazaron las tres circunferencias concéntricas de tal manera que $R1+R2 < R3$ y verificaron, trazando los lugares geométricos respectivos (uno cuando A E C3 permanecía inmóvil y arrastraban B que pertenecía a C2 y el otro cuando B permanecía inmóvil y arrastraban A). En ambos casos dichos lugares geométricos no se interceptaban con C1.

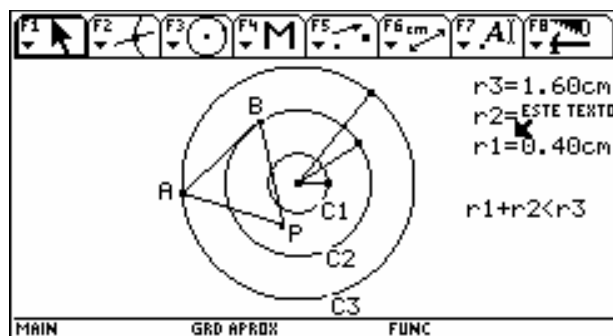


Fig. 99

Una vez terminadas las respectivas socializaciones y la puesta en común de los casos de solución única y ninguna solución, se dio por terminada la actividad propuesta.

Conclusiones

- La mayoría de los estudiantes, el 90 %, pudo solucionar con éxito el problema propuesto.

Se aprovechó al máximo el potencial que ofrecen ciertas herramientas del Cabri: arrastre, traza, macros y lugar geométrico. Dicho programa se posicionó como un excelente socio cognitivo que facilita y potencia la construcción y apropiación de múltiples saberes matemáticos.

- La actividad propuesta dio al estudiante la posibilidad de aprovechar la visualización de las construcciones dinámicas que realizaban sobre la pantalla. Dicha visualización se volvió operativa al poder explorar tales construcciones a la vez que lo proveía de múltiples oportunidades de conjeturar, hacer predicciones, controlar variables, verificar propiedades y relaciones, validar hipótesis. Las principales herramientas para potencializar tal visualización reposaban en el arrastre de puntos libres y la traza correspondiente a la trayectoria que describe un punto, herramientas que permitían “ver” una relación específica o un lugar geométrico determinado. Toda esta experimentación propició la interacción concreta del estudiante con los objetos geométricos, facilitando la construcción del conocimiento y específicamente el acercarse con éxito a la solución del problema planteado.

5.8 Construcción de triángulos isósceles

Profesoras: Gloria Agudelo y Lorenza Lozano

Institución: Colegio Distrital República de Costa Rica, Bogotá, D.C.

Grado : Sexto.

Descripción:

Se propone un ambiente de situación problema en el que se exploran condiciones geométricas

específicas para generar triángulos escalenos e isósceles.

Enunciado:

Parte A

Dado un segmento AB, ubicar un punto P fuera de él, de tal manera que al unirlo con segmentos a los extremos de A y B, se forme un triángulo escaleno.

Parte B

Dado un segmento AB, ubicar un punto P fuera del segmento, de tal manera que al unirlo con segmentos a los extremos de A y B, se forme un triángulo isósceles y continúe siéndolo aún después de mover el punto P o el segmento AB

Algunos resultados:

Parte A

Algunos niños no estaban muy familiarizados con el concepto de segmento. Otros estudiantes aportaron la definición como “porción de una recta”. En la calculadora rápidamente encontraron el objeto segmento, el cual utilizaron sin mayores dificultades ya que las condiciones requeridas para esta situación eran mínimas.

Los estudiantes inicialmente construyeron un segmento, lo etiquetaron con las letras A y B y ubicaron un punto en cualquier parte de la pantalla. Unieron con segmentos este punto con los extremos del segmento inicial y midieron. Al preguntarles por qué consideraban su construcción como un triángulo escaleno, su argumentación se basó en la visualización: “se ve que un lado es más largo que el otro”, pero al insistirles sobre otra manera de comprobarlo, utilizaron la herramienta medición de la calculadora. Para este caso la medición es suficiente argumento de validación

Algunos niños tuvieron dificultad para partir de las condiciones dadas: un segmento y un punto. Al segmento inicial le acondicionaron otros dos segmentos hasta formar un triángulo, desconociendo el punto que debían construir (ver figura 1). Esto debido quizás a la noción que tenían de triángulo y que declararon como “polígono de tres lados o segmentos”. Para ellos sólo es posible construir el triángulo con tres segmentos y no a partir de un segmento y un punto. Esta situación la interpretamos como resultado de la pobreza representacional que los estudiantes han utilizado anteriormente para dibujar triángulos.

También se dio la tendencia de confundir los nombres escaleno con isósceles y así mismo las definiciones “el triángulo escaleno tiene dos lados iguales y uno desigual”. También ocurrió lo contrario “el triángulo isósceles tiene sus tres lados distintos”. Esta confusión puede ser debida a que las definiciones las aprenden de memoria y poca oportunidad que tienen de aplicarlas en construcciones.

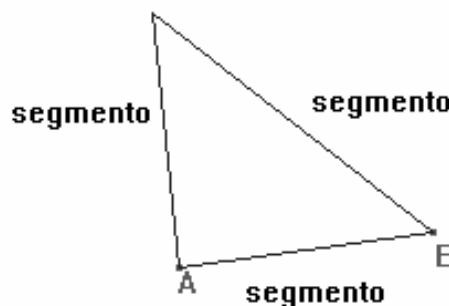


Fig. 100

Finalmente se logró resolver el problema planteado. Casi la totalidad de los estudiantes afirmó que: “para obtener un triángulo escaleno se debe ubicar un punto en cualquier parte de la pantalla”.

Resolver este problema fue sencillo, debido a que las condiciones para hacerlo eran mínimas.

La prueba de arrastre permitió evidenciar que al ubicar el punto en cualquier parte de la pantalla, fácilmente se podía construir un triángulo de diferentes medidas en sus lados. No se trataba de mostrar la invariabilidad sino la variabilidad, lo cual ocurrió.

Parte B

Al igual que en el problema anterior, algunos estudiantes optaron por construir un triángulo con segmentos, midieron dos de ellos y los movieron hasta que las medidas coincidieran, después ubicaron el punto P en un vértice. Pero al pedirles que lo sometieran a la prueba de arrastre, se perdió la igualdad de las medidas. Se solicitó entonces que partieran de las condiciones dadas: un segmento y un punto. Algo similar ocurrió con otros estudiantes quienes optaron por la herramienta *Triángulo* para hacer la construcción.

Algunos niños todavía no aceptaban la posibilidad de experimentar geometría en la calculadora. Se esforzaron entonces en imaginar la situación, que mentalmente requiere de objetos geométricos y que por último los llevó a comprender que la calculadora es el medio que les permite reproducir sus imágenes.

Para algunos estudiantes la noción de variación a partir del movimiento se constituye en un nivel de dificultad alto. Cuando trataron de construir un triángulo isósceles con medidas distintas al primero, no lo hicieron a partir del mismo segmento y punto, sino que construyeron otro triángulo independiente, utilizando segmentos.

Otras parejas de estudiantes lograron acercarse a la solución del problema por métodos un tanto informales. Una de ellas, caracterizó la ubicación del punto como aquel que debía estar “*Arriba del segmento, y como en la mitad*”, pero pensaron en un solo triángulo y no en la posibilidad de utilizar un punto externo móvil con

ciertas restricciones para obtener una familia de triángulos isósceles. Estos estudiantes no plantearon la construcción del triángulo en términos de objeto geométrico, sino de dibujo. A pesar de la limitación del aporte, se constituyó en elemento importante para avanzar en la solución del problema.

Otra pareja agregó a la idea de mitad, cómo había que mover el punto P, “*se mueve hacia arriba en línea recta, porque para otros lados se cambian las medidas*”. Curiosamente en vez de utilizar la herramienta *recta* de Cabri, utilizaron una regla de madera sobre la pantalla para ejemplificar el movimiento alineado del punto. Combinaron dos tecnologías, lo que permite afirmar aún hay dependencia de los estudiantes de tecnologías no dinámicas para ciertas situaciones geométricas. Pero ellos lograron avanzar todavía más: “*el movimiento en línea recta del punto P, tiene que ser por la mitad del segmento y seguir derecho*”.

Al solicitarles que se valieran de alguna herramienta para representar lo que decían, utilizaron *vector*. Esta caracterización que los estudiantes hicieron del movimiento del punto P, se constituyó en un acercamiento intuitivo al concepto de *Mediatriz*, herramienta necesaria para construir una familia de triángulos isósceles a partir de las condiciones iniciales dadas. (Ver figura 101). La calculadora y específicamente el programa Cabri, se consolidó como un instrumento mediador importante para este descubrimiento a través de su dinamismo.

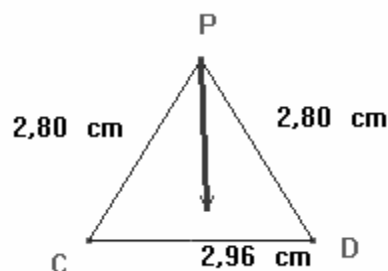


Fig. 101

Al hacer la socialización de las experiencias, y ante la pregunta formulada por el profesor: ¿Dónde ubicar un punto P para que unido a los extremos del segmento AB forme un triángulo isósceles?, los estudiantes respondieron en forma generalizada “*en toda la mitad del segmento por fuera del segmento*”.

Algunas parejas presentaron sus construcciones que no necesariamente apuntaban a resolver el problema, pero que permitió aclarar nuevamente la diferencia entre recta y segmento.

Finalmente un estudiante a su manera y con un lenguaje informal estableció las condiciones que el punto externo y móvil debía reunir: “*este punto, al moverlo hacia arriba y utilizando la huella de Cabri, dejaba un camino recto que para mantenerse así debía partir del punto medio del segmento*”. De esta manera el triángulo isósceles que se construyó mantendría esta característica (Ver figura 102).

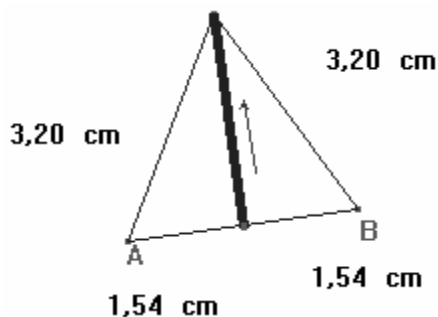


Fig. 102

Los conceptos de perpendicular, punto medio y mediatriz no fueron abordados por los estudiantes de manera directa para solucionar el problema, debido a que no se habían trabajado en clase, ni en otros cursos anteriores. Sin embargo, el planteamiento informal que hicieron, permitió obtener una idea intuitiva de estos a partir de la experimentación realizada en la calculadora. La ejecutabilidad del instrumento mediador y particularmente la Traza aplicada al punto externo,

permitió una nueva representación del concepto *Perpendicularidad* distinto al relacionado con las medidas de los ángulos que se forman entre el segmento y la recta. Estas experiencias movilizaron entonces de una manera muy particular el procesamiento cognitivo de los estudiantes ante los obstáculos no previstos por el profesor en la planeación de la situación.

Se sugirió que se utilizara la herramienta *recta perpendicular y Punto medio* de Cabri para trazar el camino caracterizado por ellos. Quedó pendiente la utilización de la herramienta *Mediatriz*, que por la premura del tiempo, no se alcanzó a utilizar ni a sugerir.

De esta manera se concluyó la primera parte de esta experiencia.

La siguiente es la respuesta dada por uno de los grupos a la pregunta: ¿Dónde ubicaron al punto P?

“*Hicimos un segmento y fuera del segmento en la parte baja pusimos el punto P, que al unir el segmento con el punto P quede un triángulo isósceles con la mitad del triángulo trazamos un vector del punto P hacia arriba del punto P al segmento*”.

Otra pareja explicó: “*Ubicar el punto en todo el centro del segmento pero separado de él un poco arriba y luego unirlos*”.

Ante la pregunta ¿Se puede construir un triángulo isósceles a partir del mismo segmento?, respondieron: “*Lo primero que hice fue hacer un segmento y luego busque en F4 un icono que se llama punto medio, este lo utilice en el segmento y marco la mitad con un punto, arriba de ese punto coloqué otro y luego elegí segmento en F2 y los uní luego lo fui cambiando con la manita y quedo el isósceles*”. Estas respuestas confirman el acercamiento intuitivo que de los conceptos de perpendicularidad, punto medio y mediatriz

hicieron los estudiantes. Lo cual ya fue analizado anteriormente.

Conclusiones:

- La principal dificultad que según nuestro criterio ocasionó que la solución tardara en llegar, fue la organización que se hizo de los temas en el programa de geometría. Se pensó que habiendo visto la noción de triángulos y su clasificación, los estudiantes estarían en capacidad de construir triángulos escalenos, isósceles y equiláteros. Pero ya sobre la acción comprendimos que para construir un triángulo isósceles se requería de conocimientos previos tales como: punto medio de un segmento, rectas perpendiculares y congruencia de segmentos, conceptos que no se trabajaron con los estudiantes por lo menos en el año en curso y al parecer tampoco en cursos anteriores, ya que los alumnos mostraron no tener algún conocimiento. Esto hizo que el tiempo para el desarrollo de la experiencia fuera mayor al previsto.
- Algunos estudiantes tienen muy arraigada la idea de imagen geométrica, es decir, existe sólo una figura, por ejemplo triángulo isósceles, que es la imagen elaborada inicialmente. Para formar otra que cumpla las mismas condiciones se tiene que hacer una nueva construcción. Esto es el producto de trabajar la geometría a partir de dibujos en donde las figuras no se relacionan entre sí, por lo tanto no se caracterizan las propiedades de los objetos.
- El profesor, a pesar de tener alguna experiencia en el diseño y desarrollo de situaciones problema como estrategia didáctica en la clase de matemáticas, planeó la clase esperando que los estudiantes rápidamente encontrarán la solución utilizando como recurso recta perpendicular, y al no ocurrir esto, se produjo cierta angustia y sentimientos de

fracaso por no haber conseguido que los estudiantes formalizaran el concepto de manera tradicional. Sin embargo, la sistematización de la experiencia y la reflexión sobre ella rescataron nuevamente el trabajo realizado y el sentimiento de éxito, permitiendo apreciar que los estudiantes utilizando la calculadora como socio cognitivo, habían producido una conceptualización de perpendicularidad y mediatriz distinta a la convencional.

- La mediación instrumental de la calculadora, para el caso particular de la construcción de una familia de triángulos isósceles a partir de un segmento y un punto externo, conduce a la necesidad de organizar el currículo de matemáticas de manera más coherente y menos fragmentada. En nuestro colegio era usual abordar temáticas en un orden rígido: punto, recta, plano, ángulos, triángulos, polígonos, etc. y aunque se han venido haciendo variaciones en la organización de los programas especialmente en el de geometría, éstas han sido hechas a partir de las creencias del docente respecto del conocimiento de los estudiantes, sin tener en cuenta o por lo menos realizado una pequeña aproximación mediante diagnóstico sobre los conocimientos previos que ellos poseen.

5.8 Argumentación en torno a una figura

Profesor: Néstor Castro Granados (Grupo Quindío)

Institución: Institución Educativa Ciudadela Henry Marín Granada, Circasia, Quindío

Grado: Noveno

Descripción:

A partir del reconocimiento perceptual de las relaciones geométricas presentes en dos figuras

se intenta que los estudiantes descubran la relación pitagórica.

Enunciado:

¿Qué relación matemática se muestra en la siguiente figura (Ver Figura 103)?

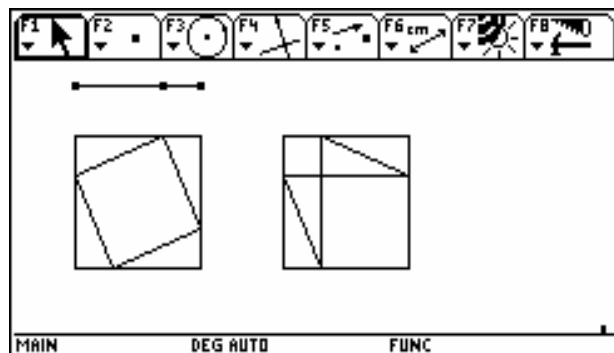


Fig. 103

Aspectos del diseño:

A cada estudiante se le entregó una guía de trabajo con la siguiente información:

La construcción básica que nos dará una ayuda visual para interpretar la situación problemática que plantearemos más adelante, la pueden hallar abriendo el archivo pitag02 que se encuentra en la calculadora. Al desplegar el contenido de este archivo se obtiene la configuración que aparece en la figura anterior.

El contenido de la construcción es relativamente sencillo de describir: dos figuras geométricas formadas por otras figuras geométricas y un segmento con un punto resaltado en la parte superior izquierda. Las figuras son el tema central de nuestro problema, el segmento y el punto son herramientas que sirven para argumentar las soluciones dadas al problema

planteado, pues la animación del punto genera diferentes posiciones de las figuras. (figura 104)

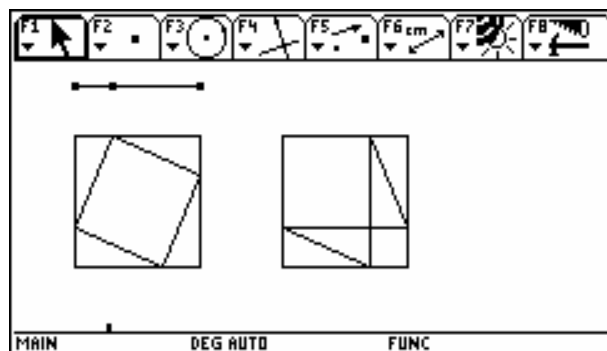


Fig. 104

Se espera que ustedes encuentren la relación existente entre las figuras. Se debe justificar la solución o las soluciones encontradas por el grupo y estar dispuestos a argumentarlas ante la plenaria del grupo.

Algunos resultados

La actividad se realizó con los estudiantes del grado 9° A, quienes han trabajado la geometría con la mediación de las nuevas tecnologías durante cerca de tres años. Las actividades pedagógicas de este proceso están determinadas por talleres que se deben desarrollar en equipos de trabajo y que orientan las actividades en clase, bajo los siguientes parámetros:

- a) Exploración libre de los estudiantes: Es la parte inicial de la actividad donde los equipos de trabajo, con la calculadora y el taller tratan de interpretar y plantear soluciones a la situación planteada.
- b) Exploración guiada: Es la intervención del profesor que se realiza en los equipos de trabajo donde sea necesario, sugiriendo, canalizando ideas y en forma general asesorando pero, sin plantear una posible solución.

c) Exposición de soluciones: Es la plenaria donde se expone en forma oral y escrita las conclusiones de cada equipo, es en este momento cuando se debatan las diferentes conjeturas planteadas, se refutan o se prueban las soluciones dadas a la situación propuesta.

d) Puesta en común: Es el resultado del trabajo de todo el grupo, con la moderación y asesoría del profesor.

Inicialmente, los estudiantes trataron de interpretar la situación planteada y se hicieron preguntas como: ¿Qué tipo de relación se presenta entre las figuras proporcionadas por el problema? ¿Se puede hablar de una igualdad entre ellas? ¿Se puede obtener la misma figura a partir de las figuras geométricas internas (triángulos y cuadrados)? ¿Los triángulos rectángulos son iguales? ¿Los supuestos cuadrados sí son cuadrados?

Indudablemente el motor que impulsó la solución de estas preguntas y el surgimiento de otras preguntas fue la animación de las figuras.

Se utilizaron dos posiciones fundamentalmente: el punto medio y los puntos extremos sobre los lados de los cuadrados como referentes para justificar las soluciones.

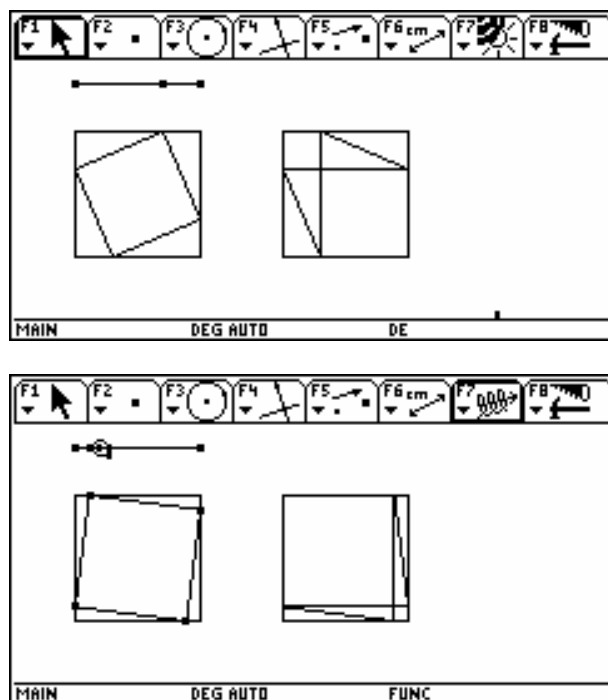
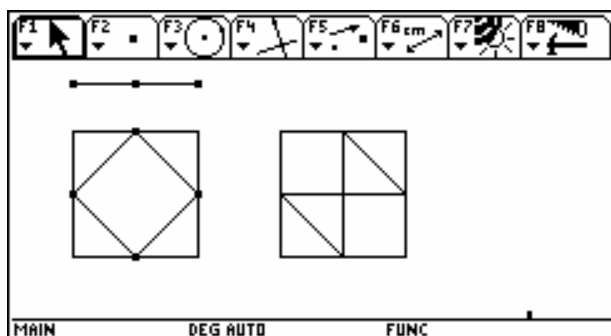


Fig. 105

En este contexto los estudiantes empezaron a formular las primeras ideas:

Estudiante N° 1: “Yo creo que el “marco” de las figuras es igual”.

Ante esta afirmación surgieron dos preguntas: ¿Qué debemos entender por “marco”? y ¿Cómo probar que los dos “marcos” son iguales?

El estudiante explicó a sus compañeros cómo el “marco” era la figura exterior, la cual ya había sido señalada como un cuadrado por varios de ellos. Para la segunda pregunta argumentó su respuesta basado en la animación de las figuras: “Si miramos las figuras cuando el punto de animación está al principio o al final del segmento, éstas se convierten en la misma figura: el cuadrado”.

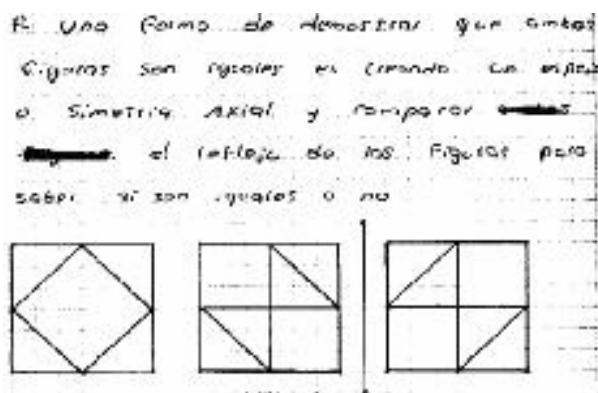
En este caso vemos que la justificación del alumno sale de la experiencia, de la geometría

dinámica que le proporciona la calculadora, la animación de las figuras es el motor de su argumentación. Se tiene un primer nivel de argumentación, que es básico para alcanzar niveles posteriores de argumentación.

Estudiante N° 2: “Una forma de demostrar que ambas figuras son iguales es creando un espejo o simetría axial y comparar el reflejo de las figuras para saber si son iguales o no”.

Si a la figura de la derecha le hallamos su simétrico con respecto a una recta vertical y luego la trasladamos sobre la primera figura, se puede observar que coinciden completamente.

Sugerencia muy importante no solamente por el enlace con conceptos ya estudiados anteriormente, sino porque su exposición desencadenó otras suposiciones en la misma dirección. Varios equipos de trabajo partieron de la sustentación hecha por este estudiante, cuya argumentación es esencialmente empírica.



Texto original del estudiante

Estudiante N° 3: “Construí un triángulo igual al que aparecen en las dos figuras, lo traslade y casó con los demás, halle su área y también dio lo mismo”.

A partir de esta construcción muchos estudiantes pudieron deducir fácilmente que el

cuadrado interior de la figura n° 2 está formado por cuatro triángulos rectángulos iguales, que los cuatro triángulos de cada figura son iguales, que el cuadrado exterior de cada figura está formado por ocho triángulos y además que el que el cuadrado interior de la primera figura debe ser igual a los cuadrados interiores de la segunda figura.

Estudiante N° 4: “Uno podría doblar los triángulos que rodean el cuadrado interior de la primera figura, como quien cierra un sobre, y obtener solamente el cuadrado, el mismo resultado se obtiene se repite el mismo procedimiento en la segunda figura y además el cuadrado estaría formado por cuatro triángulos iguales”.

Cuando al estudiante se le pidió una prueba de este enunciado (una simetría por ejemplo), consideró que la proposición era muy evidente, pero sin embargo planteó una haciendo la construcción en papel. El recurso utilizado por este alumno para argumentar su respuesta es más todo una construcción estética, una aplicación mental de los plegados.

Un alumno hizo una construcción, posterior a la práctica, que se puede clasificar en esta clase de argumentación: en madera construyó un cuadrado, en las caras elaboró con hilo y plastilina los dibujos propuestos en la práctica y en el punto medio del lado superior, clavó una puntilla que le permitía girar la construcción (una representación real de la gráfica que obtuvo en la calculadora, con el punto de animación en el punto medio). La rotación de esta construcción produce un dibujo animado de la justificación hecha por el alumno n° 2.

Esta argumentación inicial de varios equipos de trabajo, fue el soporte de una mejor argumentación de éstos y el punto de partida de otros.

Estudiante N° 5: “Si suponemos que los cuatro triángulos de cada figura son iguales, las figuras restantes también lo son; es decir el cuadrado grande es igual a los cuadrados pequeños juntos”.

Esta conclusión de forma verbal da señas del proceso que paulatinamente los estudiantes, han ido desarrollando en el transcurso de la actividad. Se puede notar que de aquí a la formulación formal de la relación matemática presentada en las figuras el camino es muy corto.

Al observar la solución planteada por este alumno, nos encontramos con una posición argumentativa diferente, caracterizada por ser deductiva y utilizar conceptos más formales (triángulos, cuadrados e igualdades); en resumen es un análisis más matemático. “Se asignan valores de confiabilidad desde una teoría que proporciona criterios de validación” (posición epistémica teórica según Duval). En este mismo ámbito se sitúa el alumno N° 3 que con la ayuda de la calculadora comprobó la aseveración del alumno N° 5. En este caso la validación de su argumentación está en la tecnología. Varios alumnos hicieron un procedimiento similar al anterior pero, con diversos valores, con triángulos y cuadrados de áreas diferentes, pero conservando la igualdad planteada.

Estudiante N° 6: “Yo me di cuenta que los cuadrados de adentro son iguales porque al ponerles animación sus medidas van cambiando pero, cuando llegan a los extremos quedan dos cuadrados grandes que empiezan a encogerse, pero uno se encoge más rápido que el otro, pero le va saliendo otro cuadrado en una de sus puntas, el otro se encoge más lento pero sólo es uno.

Tienen en común que los triángulos de los extremos del primer cuadrado son triángulos rectángulos y los triángulos del segundo

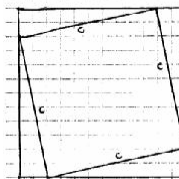
cuadrado también, y a medida que van cambiando de tamaño crecen igual. En el primer cuadrado dentro de él tenemos otro que vale c^2 , en el otro tenemos dos que valen a^2 y b^2 que esto es igual a $a^2 + b^2 = c^2$ ”

Tienen en común que los triángulos de los extremos del primer cuadrado son triángulos rectángulos y los triángulos del segundo cuadrado también, y a medida que van cambiando de tamaño crecen igual.

En el primer cuadrado dentro de él tenemos otro que vale c^2 en el otro tenemos dos que valen a^2 y b^2 que esto es igual a $a^2 + b^2 = c^2$

Se me di cuenta de que los cuadrados de adentro son iguales porque al ponerle animación sus medidas van cambiando pero cuando llegan a los extremos quedan dos cuadrados grandes que empiezan a encogerse pero uno se encoge más rápido que el otro pero le va saliendo otro cuadrado en una de sus puntas, el otro se encoge más lento pero sólo es uno.

Pues a mí la calculadora me ayudó para que ella podía cambiarme de tamaño fácilmente a las figuras.



Texto Original del Estudiante

Conclusión que pese a la complejidad en su descripción y exposición, fue aceptada por la mayoría de los estudiantes como una consecuencia lógica de todo el trabajo que se venía haciendo durante el transcurso de la actividad.

Estudiante N° 7: “Lo que nosotros hicimos fue medir el área del cuadrado grande de la figura 1 mediante letras, lo cual nos dio B^2 , después medimos el cuadrado de la figura 2 lo cual nos dio C^2 ; al final de todo nos dio esto: A^2, B^2, C^2 .

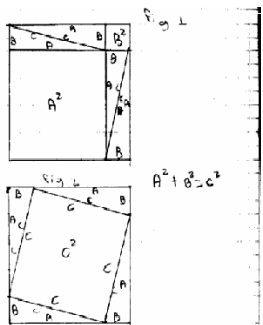
Luego transformamos estos valores a números lo cual nos dio

A	B	C
4 cm	1 cm	4.3 cm

Luego, medimos el área de estos cuadrados lo cual nos dio:

A^2	B^2	C^2
16 cm ²	1 cm ²	17.6 cm ²

Luego, sumamos $A^2 + B^2$ y nos dio 17 cm², lo cual era casi igual al C^2 o sea 17.6.



Lo que nosotros hicimos fue medir el área de los cuadrados de grande de la figura y mediante letras lo cual nos dio 6. Después medimos el cuadrado de la figura 2 lo cual nos dio al final de todo nos dio esto $A^2 + B^2 = C^2$ luego transformamos estos valores a números lo cual nos dio $A^2 = 16$, $B^2 = 1$, $C^2 = 17.6$

luego medimos el área de estos cuadrados lo cual nos dio $A^2 = 16$, $B^2 = 1$, $C^2 = 17.6$

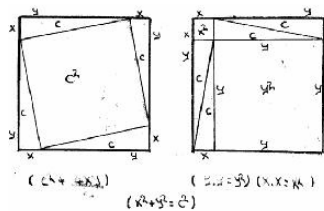
luego sumamos $A^2 + B^2$ y nos dio 17 cm lo cual era casi igual a el C^2 o sea 17.6. Nosotros nos guiamos con los triángulos

Texto original del estudiante

Estudiante N° 8: “Podemos demostrar que un cuadrado es igual a otro, si le damos un resul-

tado a cada lado de un cuadrado que esté en el interior.

Le hallamos la fórmula de base por altura que nos dará como resultado el área de la dimensión que queremos obtener, también se puede utilizar la base por altura sobre dos para encontrar un buen resultado, esto hace una semejanza al teorema de Pitágoras”.



Podemos demostrar que un cuadrado es igual al otro, si le damos un resultado a cada lado de un cuadrado que este en el interior. Le hallamos la fórmula de base por altura que nos dara como resultado el área de la dimensión que queremos obtener, tambien se puede utilizar base por altura sobre dos para encontrar un buen resultado, esta hace una semejanza al teorema de Pitágoras.

Texto original del estudiante

Aunque las tres sustentaciones de los estudiantes N° 6, 7 y 8, son muy similares, tienen orígenes y desarrollos diferentes, veamos:

- Los estudiantes N° 6 y 8, llegaron a la generalización después obtener varios valores para las dimensiones de las figuras, el alumno N° 7 comprueba que su generalización es correcta.
- Los estudiantes N° 7 y 8, determinan las áreas de los cuadrados utilizando fórmulas, el N° 6 aunque no desconoce las fórmulas utiliza más la ayuda que proporciona la calculadora.
- El estudiante N° 8 emplea el área de los triángulos para comprobar que los cuadrados

internos de las figuras son iguales, los otros dos utilizaron solamente los cuadrados.

Algunas conclusiones de la Actividad

- La actividad desarrollada por los estudiantes se puede resumir en los siguientes aspectos: conocimiento preexistente, desarrollo de la argumentación, el manejo de diferentes representaciones y el desarrollo de la fluidez conceptual; lógicamente estas estrategias no se presentan en forma lineal sino en diferentes momentos de la actividad y además, todos los estudiantes no tuvieron que cumplir el procedimiento completo para llegar a una argumentación más formal.
- Palabras como: “marco”, “espejo”, “sobre”, “cuadro”, etc, hacen parte de los conceptos y conocimientos preexistentes que el estudiante posee y que utiliza en el momento del aprendizaje y que consecuentemente hace parte de su argumentación. Así que una de las actividades del profesor en la práctica consistió en detectar las concepciones preexistentes y trabajar con ellas, aprovechar el trabajo en equipo, las exposiciones de las soluciones y la puesta en común para sustituir una serie de juicios por una nueva palabra o integrarlos a lados de éstas. En esta situación la calculadora juega un papel importante, solamente con determinar los nombres de los elementos al aproximar el cursor a ellos: reconocer un polígono regular de 4 lados o cuadrado en lugar de marco o cuadro, segmento en vez de línea, simetría por espejo, etc. En este momento es necesario aclarar que este lenguaje no formal es propio de un porcentaje muy reducido de estudiantes, pero que el desarrollo de la práctica permitió detectarlo y plantear una solución.
- Durante la experiencia se pudo ver un manejo cada vez más depurado del lenguaje matemático, el uso de la generalización, la transferencia de los conceptos aprendidos en actividades anteriores y la explotación de la potencia que proporciona la calculadora para escudriñar en otros ámbitos. Cada uno de estos hechos hacen parte de las manifestaciones de la fluidez conceptual y la fluidez algorítmica que los estudiantes han adquirido durante el tiempo que han estado en contacto con las nuevas tecnologías. Una muestra de esto es la solución planteada por el estudiante N° 2, quien desborda las expectativas del profesor en cuanto a posibles soluciones de la situación problémica; es decir su solución es inédita y extraída de los conceptos anteriores y de la manipulación de la calculadora. Una segunda muestra de la fluidez conceptual en la utilización de las fórmulas para hallar el área de las diferentes figuras presentes en la situación planteada y, aunque algunos estudiantes emplean la calculadora para el área, otros manifiestan el conocimiento de la teoría respectiva, como el estudiante N° 8.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

- La Geometría Dinámica se coloca a medio camino entre el mundo sensible (perceptible por los sentidos), en este caso esencialmente visual, y el mundo matemático, esencialmente abstracto.
- La Geometría Dinámica cambia la forma de la enseñanza de la geometría. Las herramientas tecnológicas pueden transformar la práctica docente permitiendo la producción de actividades radicalmente nuevas.
- La dinámica entre la exploración y la sistematización, generada al trabajar con un software como *Cabri Géomètre*, favorece en los estudiantes el desarrollo de una mayor capacidad expresiva que conlleva mayores niveles de argumentación.
- La exploración en un medio dinámico se convierte en un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariante.
- Un uso innovativo de la tecnología incluye un primer nivel de comprensión de un problema que es el *visual*, pero acompañado de instrumentos de control que suministran el medio dinámico como son la *medición y verificación de propiedades*. Esto es muy importante pues inicia el camino hacia la sistematización y verificación sistemática de los hechos geométricos. Todo esto desemboca, en una segunda etapa, en la *construcción de demostraciones* cada vez con un mayor nivel de formalización.
- Con lápiz y papel nos quedamos con los prototipos de las figuras, razonamos sobre los dibujos (mundo físico), pero el cuadrado pertenece al mundo de las ideas. Cabri coloca un puente entre el mundo físico y el mundo de las ideas, en el sentido que permite visualizar los invariantes geométricos al arrastrar las figuras y observar las figuras que se mantienen bajo el movimiento, visualizando las características que hacen que un cuadrado sea un cuadrado.

BIBLIOGRAFÍA

ACOSTA, E; CAMARGO, L & RODRÍGUEZ, F. (2003). *Cabri y calculadora: Socio cognitivo y dominio de abstracción*. En: *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Serie Memorias. MEN. 369 P.

ACOSTA, M. (2001). *Simulación de un problema geométrico: Volumen de un Prisma*. Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

ALSINA, C; FORTUNY, & PEREZ, R. (1997) *¿Por qué Geometría?. Propuestas Didácticas para la ESO*. Editorial Síntesis. Colección Educación Matemática en Secundaria.

CAPPONI & LABORDE, C (eds) (1998). Actes de l'Université d'été: *Cabri Géomètre, de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie*. IREM et IUFM de Grenoble. Grenoble. Francia.

CAPPONI & LABORDE, C (eds) (1994). Actes de l'Université d'été: *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur: Utilisation du logiciel Cabri Géomètre en classe*. IREM Grenoble, Domaine Universitaire, 38402 Saint Martin d'Hères. Grenoble. Francia.

CLEMENS, D. & BATTISTA, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. En GROUWS, DOUGLAS (ed.). *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. NCTM, New York.

CUPPENS, Roger (2002). *Avec Cabri – Géomètre II, Jouez... Et Faites de la Géométrie !*. No. 136. APMEN (Asociación de Profesores de matemáticas de l'enseignement public). Francia.

CUPPENS, Roger (1999). *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec cabri – géomètre II*. Tome 1 No. 124 ; Tomo 2 No. 125. APMEN (Asociación de Profesores de matemáticas de l'enseignement public). Francia.

CENTRE INFORMATIQUE PEDAGOGIQUE (CIP) (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri – Géomètre*. Genève. Italia.

DAVIES, P. (1995).

DE VILLIERS (1999).

DUARTE, T. (1997). *Modelación y Computación en Ciencias y Matemáticas*. Revista de Informática Educativa, vol. 10, No. 2, pp. 171 – 182.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Valle. 314 P.

DUVAL, R. (2000).

GONZÁLEZ-LÓPEZ, María J. (2000). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica*. En Gómez P. y Rico L. (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Granada: Editorial Universidad de Granada. España.

GONZÁLEZ, M. J. (2001). *Reflexiones en torno a la demostración* (recopilación de textos preparados por el Grupo de Aprendizaje de la Geometría). Documento en línea ver <http://uv.es/~didmat/angel/seiembid.html#textos>.

GUTIERREZ, A. LABORDE, C., Noss R., Rakov S. (1999). *Tools and Technologies*. European Research in Mathematics Education I: Group 2. URL: www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html.

HERSHKOWITZ, R; VINNER, S & BRUCKHEIMER, M. *Activities with Teachers Based on Cognitive Research*. En Learning and Teaching Geometry, K – 12. Yearbook 1987. NCTN, Reston, Virginia.

KUTZLER, B. (1996). El Taller de la TI- 92. Versión Española de: Ma, Dolores Rodríguez Soalleiro. FASTER, Madrid.

LABORDE, C. (2000). *Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving*. Revista: Educational Studies in Mathematics 44; 151 - 161.

LABORDE, C. (1998) *Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based environment*, en Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st Century. ICMI Study. Kluwer Academic Publisher.

LABORDE, C. (1992) *Solving Problems in Computer Based Geometry Environments: The influence of the features of the software*. Zentrablatt für Didactik des Mathematik, 92 (4), 128 - 135.

LABORDE, C. (1996). *Cabri Géomètre o una nueva relación con la geometría*, en Puig L; Calderón J, Investigación y didáctica de las matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE. Madrid.

LOZANO, E. L. (2003) Exploraciones Acerca de Ángulos Congruentes a Partir de Ambientes de Aprendizaje Dinámicos. En: *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Serie Memorias. MEN. 369 P.

- MAMMANA, C. & VILLANI V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kluwer Academic Publishers. 340 P.
- MEN (2002). Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie memorias, Bogotá, Colombia.
- MEN (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos Curriculares. Punto exe editores. Bogotá D.C., Colombia.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Serie Lineamientos. República de Colombia. 1998
- MEN (2003). *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*. Enlace editores. Bogotá D.C., Colombia.
- MORENO, L. (2002) *Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización*. Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.
- MORENO, L. (1996). *La demostración en perspectiva*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1.
- MORENO, L. (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología*. Avance y Perspectiva. Vol 20. PP. 65 – 68.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and standars for school mathematics*. USA: Library of Congress.
- NEUBRAND, M. (1998). *The Geometry curriculum in Germany: past and future trends*. En Mammana y Villani, perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century, ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, p. 259.
- NISS, M. (1998). *Teacher qualifications and the education of teachers*. En Mammana y Villani. Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st Century. Klwer Academic Publishsers, pp. 297 - 318.
- POLYA, G. (1978). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.
- RUTHVEN, K. (1996). *Calculators in the Mathematics Currículo: The Scope of Personal Computational Technology*. En: Bishop, A. et. al. (eds). International Handbook of Mathematical Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- SAMPER, C; LEGUIZAMON, C & CAMARGO, L. *Razonamiento en geometría*. Revista EMA, vol. 6, no. 2,

SCHUMANN, H., GREEN, D. (1994). *Discovering Geometry with a computer: using Cabri-Géomètre*. Chart Well-Bratt, Sweden.

VADCARD, L. (1999). *La Validation en Geometrie au College avec Cabri – Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires*. Petit X, No. 50.

VIÑAS M y otros (2003). *La Calculadora: Una Fuente De Exploraciones Conceptuales*. En: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Serie Memorias. MEN. 369 P.