



¿Cuáles son las probabilidades?

Actividades para el aula - EGB 3

Guía para el docente

Título: ¿Cuáles son las probabilidades?

Nivel: Tercer Ciclo de la EGB

Área: Matemática

Área vinculada: Informática

Tiempo estimado: Cuatro clases

Software requerido: Microsoft Excel, Microsoft Internet Explorer (opcional)

Habilidades computacionales previas: Habilidades básicas en el manejo de Microsoft Excel. Fórmulas básicas. Creación de gráficos

Resumen

Con este proyecto se propone introducir a los estudiantes en la teoría de la probabilidad. Las nociones que pueden adquirir tienen aplicaciones en el mundo real, en distintos niveles de complejidad.

Objetivos

- Conocer y comprender la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones.
- Conocer las técnicas estadísticas y herramientas computacionales para interpretar, analizar, organizar y presentar datos numéricos.

Contenidos conceptuales

- Conceptos de azar, posibilidad, imposibilidad y grados de probabilidad.
- Advertir que los fenómenos aleatorios están regidos por leyes bien precisas.

Contenidos procedimentales

- Cálculo e interpretación de valores, en gráficos.
- Generalización de soluciones y resultados.
- Descripción de relaciones entre conjuntos de datos.
- Toma de decisiones de acuerdo con los resultados obtenidos.

Contenidos actitudinales

- Confianza en sus posibilidades de plantear y resolver problemas.
- Valoración del trabajo cooperativo y la toma de responsabilidad para lograr un objetivo común.

- Valoración de la matemática en su aspecto lógico e instrumental.

Descripción

Conociendo los pasos del proyecto

-**Revise** los sitios web y materiales que se sugieren en el ítem de **Recursos**.

Los recursos **El problema de los discos** y **Cazando grillos** pueden resultarle de interés para ampliar los temas a trabajar.

Si decide utilizar las páginas web sugeridas le convendría agregarlas a los **Favoritos** en las computadoras de sus alumnos, antes de comenzar la actividad. Si desea trabajar con las páginas web sin conexión, puede bajarlas con el programa TeleportPro y grabarlas en las computadoras (ese programa y tutorial correspondiente puede encontrarlos en el CD 4 de la **Colección educ.ar**).

También puede imprimir las actividades y utilizarlas como material de consulta o para instalar el debate sobre el tema entre sus alumnos.

Actividades de discusión

-Los **Pasos A** y **C** son actividades de discusión de toda la clase: proveen preguntas para moderar el intercambio de ideas previas entre los alumnos.

-Para los **Pasos B, D** y **E**, sus alumnos trabajarán en equipos.

Para el **Paso B**, baje el libro de trabajo de Excel llamado **Analizador de lanzamiento de dados**. Revíselo cuidadosamente. En este mismo paso se explica cómo construir un libro de trabajo Excel que se parece mucho a ese, para simular el lanzamiento de los dados y analizar y graficar los resultados.

Si usted prefiere que sus estudiantes no hagan su propio libro de trabajo, guarde el archivo **Analizador de lanzamiento de dados.xls**, que se encuentra en el apartado **Recursos**, en la red de su clase o en las máquinas de cada grupo; sus alumnos pueden entonces no realizar los puntos 2 a 8 del **Paso B**.

Al finalizar la actividad se presentan desafíos relacionados con el tema, para que los alumnos resuelvan. Usted puede decidir la metodología para realizar esta actividad; también podrá encontrar links con orientaciones didácticas.

Recursos

Para descargar un archivo haga clic sobre él con el botón derecho del mouse, y seleccione Guardar como/Guardar destino como para elegir una ubicación en su PC; luego presione OK.

-*Incluidos en este CD:*

Analizador de lanzamiento de dados.xls

El problema de los discos (tomado de www.educ.ar)

Cazando grillos (tomado de www.educ.ar)

-*Recursos en internet:*

Probabilidad

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html>

Historia de la probabilidad y conceptos básicos

<http://server2.southlink.com.ar/vap/PROBABILIDAD.htm>

Guía para los alumnos

Descripción

Muy pocas personas entienden verdaderamente la teoría de la probabilidad, a pesar de que es tan relevante en nuestra vida cotidiana.

La teoría de la probabilidad puede predecir el comportamiento de la economía y del clima, las probabilidades de que se pierda un colectivo o de recibir una llamada de cierta persona a la noche.

Esta actividad les dará una muestra de la teoría de la probabilidad y de lo que se puede hacer con sus aplicaciones.

A. Cara o cruz

Software: Ninguno

¿Tienen una moneda?

Eso es todo lo que necesitan para demostrar las leyes fundamentales de la probabilidad. El profesor los guiará para debatir sobre las siguientes cuestiones.

Para dialogar:

Cuando se lanza una moneda:

¿cuál es la probabilidad de obtener cara?;

¿y de obtener cruz?

La teoría de la probabilidad establece que si existen N salidas igualmente probables, la probabilidad de obtener cualquier salida es $1/N$.

1- Para encontrar la probabilidad de dos eventos independientes que ocurren en secuencia, se debe encontrar la probabilidad de cada evento separadamente y después multiplicar las respuestas.

Los lanzamientos de moneda son eventos independientes.

¿Cuál es la probabilidad de que caigan tres cruces seguidas si lanzamos tres veces una moneda?

2- ¿Cuál es la probabilidad de que caigan, ya sea tres cruces o tres caras seguidas?

Esta pregunta difiere de la anterior debido a que hay un 100% de posibilidad de que salga cara o cruz en el primer lanzamiento.

3- Supongan que lanzan un dado de seis lados. ¿Cuál es la probabilidad de cada salida posible (1-6)?

4- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número par o impar, o un número divisible por 3? Describan la relación entre eventos y salida en la teoría de la probabilidad.

5- ¿Cómo probarían sus respuestas a cada una de estas preguntas? ¿Pueden argumentar sus razonamientos para comprobar que sus respuestas son correctas?

6- Entre todos y con la ayuda del profesor elaboren definiciones para los conceptos mencionados.

B. Agitar, mezclar y lanzar

Software: Microsoft Excel

En un primer momento van a utilizar la teoría de la probabilidad para predecir las probabilidades de que salga un número determinado al tirar un dado.

Después lancen el dado y comprueben qué tan bien pueden sostener la hipótesis que elaboraron.

Si cuentan con conexión a internet, busquen información sobre el tema que pueda ayudarlos.

1- Puede ser imposible ganarles a las probabilidades, pero es fácil calcular cuáles son. Formen un equipo con sus compañeros para investigar el comportamiento de un dado virtual.

a. Para un solo dado de seis lados, la probabilidad de cada salida posible (1, 2, 3, 4, 5, 6) es $1/6$.

b. Cuando se lanzan dos dados, hay $6 \times 6 = 36$ posibles salidas, como se representa en las celdas de la siguiente tabla. La probabilidad de cada una de estas salidas es $1/36$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

c. La probabilidad de un evento en particular, como que caiga una combinación que sume 8, es la suma de las probabilidades de las salidas que produce. Por ejemplo, existen cinco maneras de que caiga un 8, así que la probabilidad de que caiga un 8 = 5 (1/36) = 5/36. Calculen las probabilidades de que caiga cada combinación, desde 2 hasta 12.

d. Observen y analicen el cuadro anterior y respondan:

Cuando se tiran dos dados y se suman sus números, ¿cuál es el número que tiene más posibilidades de salir? ¿Cuántas posibilidades hay de que salga?

2- Pueden construir un simulador de lanzamiento de dados en Excel para probar sus predicciones de probabilidad. Deben tener en cuenta lo analizado en el punto anterior para crear las fórmulas.

Para tener en cuenta: la siguiente explicación se realiza teniendo en cuenta la planilla sin los encabezados, partiendo de la fila 1 y hasta la 108.

3- Deben usar la función de azar de **Excel** para simular un dado. La fórmula de número al azar (**RAND()**) o (**ALEATORIO()**) genera un número al azar entre 0 y 1. Necesitarán multiplicar este número por 6 para obtener un número en el rango correcto (0-6). Para convertir estos resultados a números enteros, necesitarán aplicar la función entera (**INT**) o (**ENTERO**). Finalmente, debido a que la función entera redondea al número menor entero más cercano (dando un rango numérico total de 0-5), necesitarán agregar 1 al resultado para efectuar lanzamientos al azar de un dado de 1 a 6. La fórmula para simular el lanzamiento de un dado es:

$$= \text{INT}(6 * \text{RAND}()) + 1$$

$$= \text{ENTERO}(6 * \text{ALEATORIO}()) + 1$$

Tecleen esta fórmula en la celda A1 y utilicen la función de llenado para copiarla en ambas columnas A y B hasta el renglón 108. (Se escoge 108 porque es un múltiplo de 36 y simplifica pasos posteriores).

4- Las columnas que definieron "lanzarán" dos dados simultáneamente (la columna **A** representa un dado; la columna **B** representa el otro) 108 veces. Ahora necesitan definir la columna C para el total de los dos dados para cada lanzamiento. En la celda **C1**, escriban la fórmula: **=A1+B1**.

Utilicen la función de llenado para copiar esta fórmula hasta la celda 108.

5- Definan las tres columnas siguientes a su columna de conteo:

a. En la columna **E** tecleen los números desde 2 hasta 12. Esto servirá como referencia para identificar qué es lo que se está contando en cada celda. Pueden utilizar la función autocompletar.

b. Definan en la columna **F** los conteos que esperan para cada salida, basados en la tabla de probabilidades del **Paso B**. Por ejemplo, la probabilidad de que caiga 7 es 6/36. La fórmula para tal salida esperada, cuando el dado es lanzado 108 veces es: **=(6/36)*108**.

Lanzando el dado 108 veces (o cualquier múltiplo de 36) se eliminan las salidas fraccionales y la necesidad de redondear el resultado.

c. En la columna G pueden utilizar la función de **Excel COUNTIF()** o **CONTAR.SI()** para contar cuántas veces obtienen cada posible salida (2-12) al lanzar sus dos dados. Por ejemplo, para contar el número de

veces que ocurre un 7 en las celdas de la **C1** hasta la **C108**, utilicen la fórmula:

= COUNTIF(\$C\$1:\$C\$108,7)
=CONTAR.SI(\$C\$1:\$C\$108,7)

donde \$C\$1:\$C\$108 define el rango de celdas y 7 es el número que debe contarse. Definan once celdas para contar las posibilidades de que salga entre 2 y 12 en la suma de los dos dados, es decir en las celdas **C1-C108**.

d. Definan en la columna **H** que calcule el porcentaje por el cual la salida real difiere de la salida esperada. Por ejemplo, si las ocurrencias esperadas de 7 se calculan en la celda **F7**, y las ocurrencias reales se calculan en la celda **G7**, puede calcular la diferencia con la fórmula: **= (G7-F7)/F7**.

Definan las celdas de las columnas para que muestren los resultados como porcentajes y no como números decimales, ejemplo 14%.

6- Creen el gráfico con el resultado de sus sesiones de lanzamiento de dados.

Seleccionen **Gráfico** del menú **Insertar**.

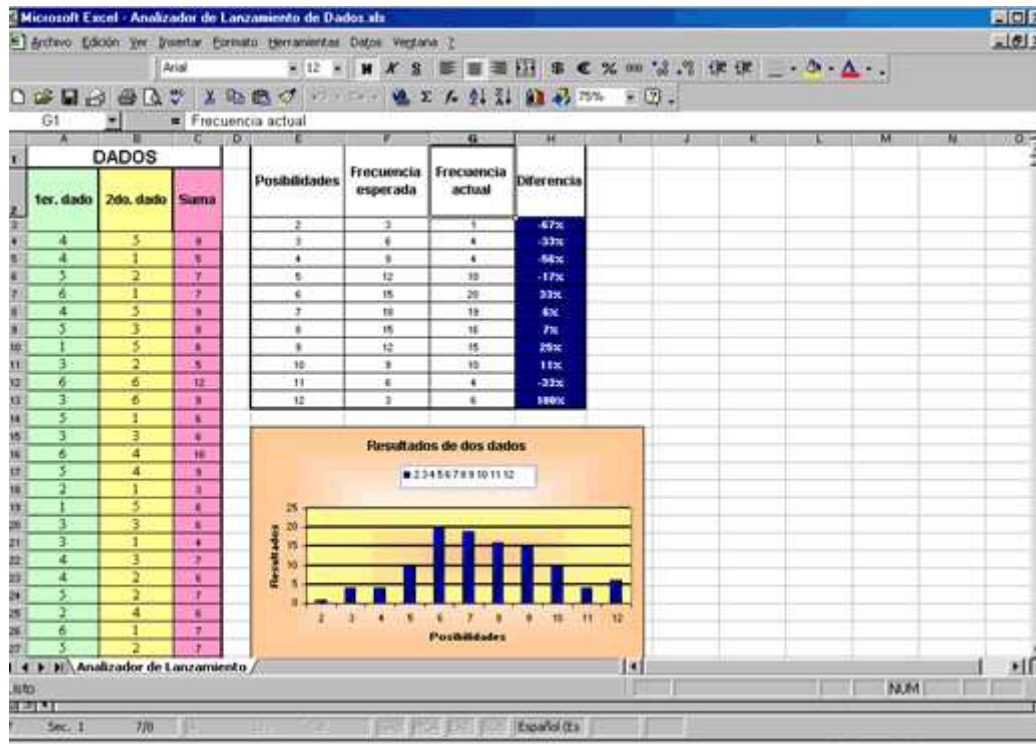
a. En la ventana del **Asistente para Gráficos**, seleccionen **Columnas** en la tabla de **Tipos Estándar**, y a continuación presionen **Siguiente**.

b. En la ventana de **Asistente para Gráficos**, escriban el **Rango de Datos** seleccionando las once celdas que contaron las salidas de sus lanzamientos. Seleccionen la opción de **Columnas** para indicar cómo quieren que se muestren las series. En la pestaña **Serie**, especifiquen las **Etiquetas de Categoría de Eje (x)** seleccionando las once celdas que representan el rango posible de salidas (2-12). Presionen **Siguiente**.

c. En la ventana de **Opciones de gráfico** del asistente, etiqueten su tabla y ángulos en la barra de **Títulos**. Presionen **Siguiente**.

d. En la ventana de **Ubicación del gráfico**, especifiquen dónde desean que se localice la hoja de cálculo, y después presionen **Finalizar**.

7- Si desean colocar encabezados en las columnas, utilicen el comando de **Insertar -> Fila** para crear celdas y escribir una etiqueta de texto por encima de las columnas. La planilla plantilla debe verse similar al ejemplo que se muestra a continuación.



Ejemplo de Analizador de Lanzamientos de Dados

8- Presionen **F9** para lanzar los dados y recalcular la hoja de datos. (La hoja de datos se recalcula cada vez que se abre).

9- ¿Los porcentajes para cada lanzamiento concuerdan con sus predicciones? ¿Las diferencias son mayores o menores de lo que esperaban?

10- Utilicen el comando de llenado para extender las columnas A, B y C para lanzar múltiplos mayores de 36. Recuerden ajustar los valores de las fórmulas de la columna de salida esperada y salida real de acuerdo con esto. ¿Cómo afectan los resultados?

11- ¿Qué pueden deducir que sucede cada vez que se incrementa la cantidad de lanzamientos con relación al gráfico?

Recursos

Para descargar un archivo hagan clic sobre él con el botón derecho del mouse, y seleccionen Guardar como/Guardar destino como para elegir una ubicación en su PC; luego presionen OK.

-Incluidos en este CD:

Analizador de lanzamiento de dados.xls

El problema de los discos (tomado de www.educ.ar)

Cazando grillos (tomado de www.educ.ar)

-Recursos en internet:

Probabilidad

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html>

Historia de la probabilidad y conceptos básicos

<http://server2.southlink.com.ar/vap/PROBABILIDAD.htm>

-Incluidos en este CD:

El problema de los discos

(Tomado de <http://www.educ.ar>)

Contenidos

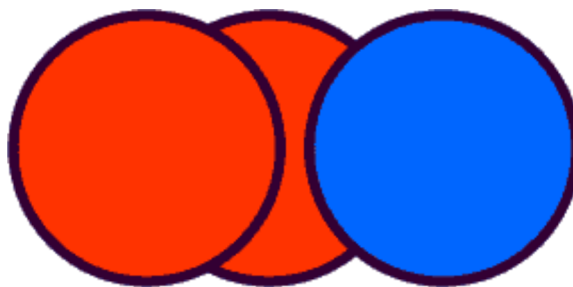
La simulación de fenómenos aleatorios.

Propósitos

Una de las finalidades de las probabilidades es descubrir modelos matemáticos que sirvan para interpretar del mejor modo posible una situación probabilística dada. En muchas ocasiones, estos modelos pueden no estar al alcance de los alumnos o resultarles complejos. Es en estos casos donde la simulación puede convertirse en una herramienta interesante para la búsqueda de un modelo

aproximado para trabajar la situación. Del mismo modo, la simulación puede usarse como instrumento para "verificar" o "controlar" ciertos resultados obtenidos teóricamente.

La actividad que proponemos a continuación es interesante puesto que, si bien es posible encontrar un modelo teórico para resolverla, el modelo empleado comúnmente por los alumnos es errado y la simulación aparece como un instrumento para poner en cuestionamiento dicho modelo.



Desarrollo

Problema 1

En una caja hay tres discos de igual diámetro; uno de ellos tiene una cara roja y la otra azul; el otro

tiene las dos caras rojas y el tercero las dos caras azules.

El profesor extrae al azar uno de los discos y muestra a los alumnos una de sus caras. Los alumnos tienen que adivinar el color de la cara oculta. Este juego se repite 20 veces y resulta ganador aquel que consiguió acertar la mayor cantidad de veces el color de la cara del disco que no se muestra.

¿Les parece que hay alguna estrategia que les permita ganar?

Comentarios

Es habitual que en este problema los alumnos respondan que "da lo mismo decir cualquier cosa" o que "no existe ninguna estrategia más conveniente que otra", proponiendo el siguiente argumento: del otro lado del disco puede haber rojo o azul, entonces da lo mismo que diga cualquiera de estos dos colores puesto que la probabilidad de cada uno de ellos es $1/2$.

Como este razonamiento no es correcto, proponemos invitar a los alumnos a que realicen el juego con alguno de sus compañeros (eligiendo una estrategia a seguir), lo que permitirá el cuestionamiento de aquel. Es posible que simulen el juego, recortando tres papelitos del mismo tamaño y coloreándolos, o colocando alguna identificación, como por ejemplo una cruz para los lados que representan el rojo y un círculo para los lados que representan el azul.

Será conveniente proponer a los alumnos que construyan un cuadro como el siguiente:

| | Color que se muestra | Color supuesto | Color real |
|------------------------|----------------------|----------------|------------|
| Primera partida | | | |
| Segunda partida | | | |
| Tercera partida | | | |
| Cuarta partida | | | |
| | | | |

Realizando el análisis del cuadro es posible comenzar a cuestionar esta primera estrategia de los alumnos: se empieza a sospechar que si se elige como estrategia "decir el mismo color que nos muestran", se hubiera ganado en más casos.

Efectivamente, en este juego es conveniente elegir el mismo color que se está mostrando puesto que en la caja hay tres papeles de los cuales dos tienen de los dos lados el mismo color. Entonces, la probabilidad de sacar un papel que tenga de los dos lados el mismo color es $2/3$.

Problema 2

De un mazo de 40 cartas se extrae una, se vuelve a mezclar en el mazo y luego se extrae otra. Interesa calcular la probabilidad de que las dos cartas sean del mismo palo.

Comentarios

Dependiendo del nivel de escolaridad de los alumnos, la simulación podría ser utilizada, en este caso, para "controlar" un resultado teórico o para "aproximarnos" a un resultado teórico.

Una manera de aproximarse al valor de la probabilidad es realizar la experiencia efectiva. Pero también es posible simular esta experimentación mediante la utilización de cualquier recurso que genere números

aleatorios.

Por ejemplo, en las calculadoras existe una tecla RANDOM que proporciona comúnmente números aleatorios en el intervalo $(0; 1)$. Para resolver el problema planteado podemos usar este recurso, de la siguiente manera: como en el mazo de cartas hay cuatro palos diferentes y suponemos que todos tienen la misma posibilidad de aparecer (es decir, que los sucesos son equiprobables), cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo $(0; 0.25)$ simulará la aparición de cartas de un cierto palo, por ejemplo oro; cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo $(0.25; 0.50)$ simulará la aparición de cartas de otro palo, por ejemplo copa; cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo $(0.50; 0.75)$ simulará la aparición de cartas de espada y, por último, si aparece un número aleatorio perteneciente al intervalo $(0.75; 1)$ supondremos que se trata de una carta de basto.

Entonces, es posible armar una tabla con pares de números aleatorios y determinar la frecuencia relativa de aparición de cartas del mismo palo para aproximarse a la probabilidad teórica. Según el tipo de problemas que se trabajen, será necesario adaptar la utilización de la calculadora o la tabla de números aleatorios.

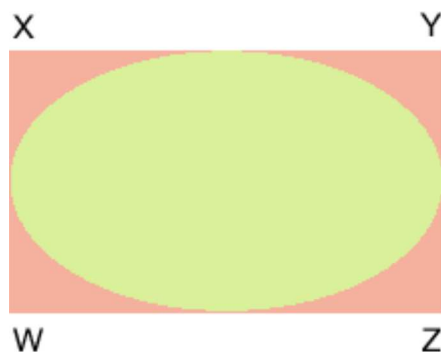
Cazando grillos

(Tomado de <http://www.educ.ar>)



Dos biólogos, la Dra. Grilly y el Dr. Cricri, están estudiando desde hace meses las costumbres de una especie de grillos. Han podido localizar un grillo de este tipo en una parcela de campo en la pampa húmeda, y observar que el grillo sale de su madriguera por la noche para alimentarse de alfalfa y regresa de día. La madriguera es un agujero en la tierra y los científicos discuten respecto de la ubicación exacta del grillo dentro de ella, pues se manejan con cierto grado de indeterminación debido a irregularidades del terreno y a perturbaciones sonoras.

Los dos biólogos analizan mediciones vinculadas con la ubicación del grillo en su madriguera. Cada uno enuncia una hipótesis: la Dra. Grilly afirma que está en el interior del rectángulo XYZW, de 1,5 m por 0,9 m. El Dr. Cricri, por su parte, estima su posición en el interior de una elipse inscrita en el rectángulo XYZW, como indica la siguiente figura:



- 1- Explicá, utilizando argumentos vinculados con figuras geométricas, por qué la elipse representada en el dibujo está bien definida.
- 2- Si aceptamos que la afirmación de la Dra. Grilly es correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la afirmación del Dr. Cricri sea también correcta? Describí los pasos que seguiste.
- 3- Para que realices tu propia experiencia te proponemos organizar dos simulaciones que te permitirán estimar la probabilidad teórica que antes calculaste:
 - a. Proponé una simulación utilizando lentejas y el dibujo anterior y pautá los pasos a seguir. (Tené en cuenta que las lentejas representan el grillo y su posición sobre el gráfico, la ubicación en la madriguera.)
 - b. Proponé una simulación por computadora y pautá los pasos a seguir.
- 4- Llevá a cabo los experimentos que propusiste.
- 5- Exponé las conclusiones a las que llegues comparando los resultados obtenidos en ambos casos.

textos: Cecilia R. Crespo Crespo
ilustración: Sergio Merayo
edición: Christiane C. Ponteville